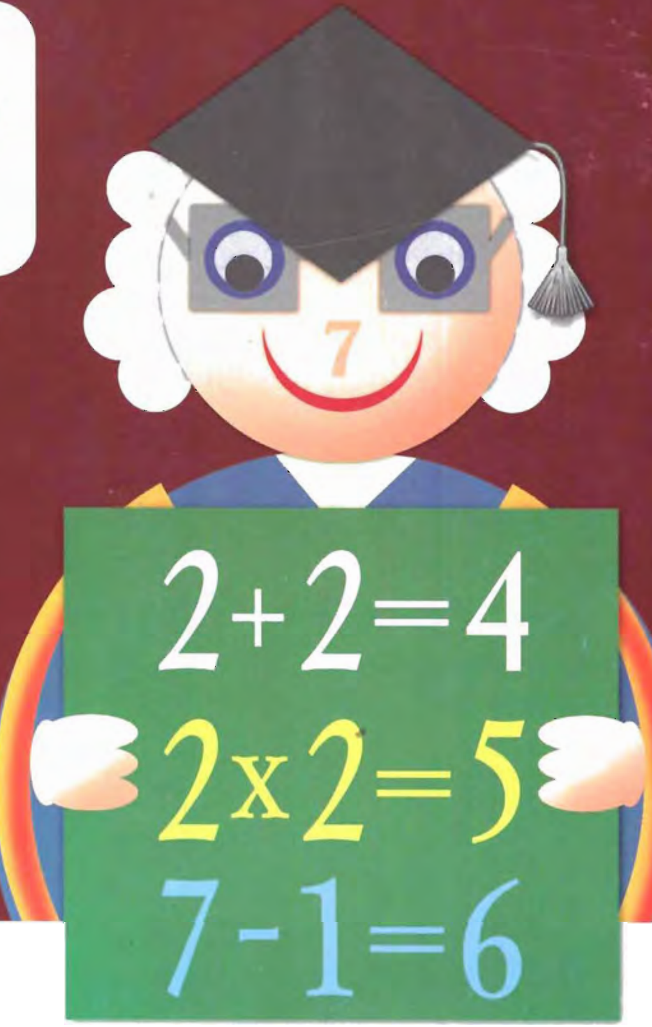
Для кофейников



ТОБИАС ДАНЦИГ

ЧИСЛА — ЯЗЫК НАУКИ

Тобиас Данциг (1884-1956) – доктор математических наук (университет США, штат Индиана), преподавал в Колумбийском университете и университете в Мэрилэнде.

Жозеф Мазур – профессор математики (колледж Мальборо). Читал курсы по всем разделам математики, по истории и философии математических наук. Автор книги "Евклид в джунглях: познание абсолютной истины в логике и математике".

Барри Мазур – профессор Гарвардского университета, преподаватель математики, занимался исследовательской работой, автор книги "Изображение чисел".

Для кофейников

ТОБИАС ДАНЦИГ

ЧИСЛА - ЯЗЫК НАУКИ

Редактор Жозеф Мазур
Предисловие Барри Мазур

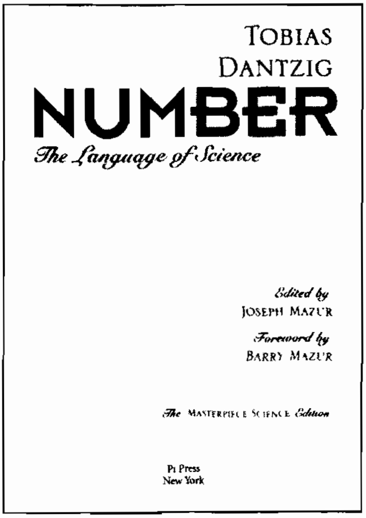
Перевод с английского
под редакцией И.Ю. Шкадиной

ТЕХНОСФЕРА
Москва
2008

Тобиас Данциг
Числа – язык науки
Москва:
Техносфера, 2008. – 304 с., ISBN 978-5-94836-172-7

Можно сказать, что эта книга открывает дорогу к математике. Данциг объясняет основы математики очень просто, красноречиво рассказывая о глубоких философских проблемах, которые появились на этом пути. Он описывает свойства всех типов чисел – целых, простых, иррациональных, трансцендентных и других; объясняет важность введения понятия нуля и показывает, какую революцию в арифметике вызвало появление этой цифры. Автор показывает, как изобретение символов для алгебраических преобразований положило начало новой эпохе в математике; как арифметика и геометрия связаны между собой и как используется понятие бесконечности для моделирования непрерывности пространства и времени.

Впервые эта книга была издана в 1930 году. Спустя более чем 50 лет Джозеф Мазур написал к ней новое послесловие, замечания и библиографическую справку, а Барри Мазур – предисловие. Эта книга рассказывает о том, как появились самые замечательные гении в истории человечества, как погоня за знаниями приводила к расцвету и закату цивилизаций.



TOBIAS
DANTZIG
NUMBER
The Language of Science

Edited by
JOSEPH MAZUR
Foreword by
BARRY MAZUR

The MASTERPIECE SCIENCE *Edition*

Pi Press
New York

ISBN 978-5-94836-172-7
ISBN 0-13-185627-8 (англ.)

Содержание

Предисловие

Книга, которую вы держите в руках, — результат многолетних размышлений о Числе и ода красоте математики.

Это классическое произведение, посвященное эволюции понятия Числа. Да, Число развивалось, и будет продолжать развиваться. Но как оно появилось? Мы можем только предполагать.

Возможно, впервые Число появилось в языке в качестве прилагательного? Три коровы, три дня, три мили. Представьте, какое возбуждение вы бы почувствовали, если бы вы были первым человеком, которого внезапно посетила блестящая мысль о том, что единая нить связывает «три коровы» с «тремя днями» и что, возможно, стоит иметь дело с их общей «тройственностью». Если когда-либо так и случилось с одним человеком в один момент, то это стало колоссальным скачком вперед. Ведь отделенное понятие «тройственности», собирательное *три*, охватывает намного больше, чем коровы или дни. Ведь теперь достигнута стадия, когда можно сравнить, например, один день с тремя днями, понимая, что вторая продолжительность втрое больше, чем первая; представляя с еще одной точки зрения «три», т.е. связывая его с действием утроения. *Три*, если хотите, воплощено в глаголе *утраивать*.

А возможно число появилось совсем иначе, в результате некоего волшебства, например, как в детском стишке «Раз, два, три — елочка гори».

Однако число появилось, и история продолжается, и Число, скромное Число, больше чем когда-либо приковывает к себе наше внимание. Мы пытаемся понять, что же это такое. Ранние пифагорейцы должны бы танцевать в своих пещерах.

Если бы я был человеком, который стремится побольше узнать о математике, но у которого никогда на это не было времени, и если бы я оказался в одиночестве на пресловутом «необитаемом острове», то первая книга, которую я надеялся бы взять с собой, по правде говоря, была бы хорошим руководством по плаванию. Но вот второй книгой вполне могла бы быть эта. Поскольку Данцигу удалось решить самые важные задачи научного изложения: сделать его доступным для читателей с математическим образованием, не превышающим объем средней школы; ясно и отчетливо изложить материал самый существенный для рассказываемых историй; рассказать наиболее важные истории и — что крайне редко удается авторам — объяснить идеи, а не просто указать на них.

Один из самых интересных сюжетов в истории Числа связан с изменением этого понятия по мере расширения республики чисел: от натуральных чисел

$$1, 2, 3, \ldots$$

к государству, в которое вошли отрицательные числа и ноль

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

затем дроби, действительные числа, комплексные числа, а потом, посредством различных форм колонизации, бесконечность и иерархия бесконечностей. Данциг выясняет причины таких расширений – именно этот лейтмотив придает целостность истории, связывая отдельные шаги в единый рассказ. Обсуждая расширение понятия числа, Данциг цитирует Луи XIV. Когда короля Луи XIV спросили, в чем заключается основополагающий принцип его внешней политики, он цинично ответил: «Аннексия! Потом всегда можно найти толкового юриста, чтобы оправдать это действие». Но сам Данциг ничего не оставляет юристам. Он предлагает внимательно взглянуть на муки рождения новых понятий в математике, при этом всегда сосредотачиваясь на жизненно важном вопросе, пронизывающем всю эту историю: Что означает, что математический объект существует? Данциг, комментируя появление комплексных чисел, говорит: «Столетиями [комплексные числа] играли роль мистической связи между разумом и воображением». Он цитирует Лейбница, чтобы выразить это смятение в умах:

«Божественный дух нашел чудесное убежище в этом чуде анализа, знамении идеального мира, почти амфибии между бытием и небытием, которое мы называем мнимым корнем из отрицательного числа». (с. 178)

Данциг описывает и свои первоначальные затруднения:

«Вспоминаю свои собственные впечатления, когда я впервые был посвящен в тайны комплексных чисел. Я помню свое недоумение, поскольку величины очевидно невозможные тем не менее допускают манипуляции, что приводит к конкретным результатам. Я чувствовал неудовлетворенность, беспокойство, желание наполнить содержанием эти иллюзорные создания, эти пустые символы. Затем я узнал о конкретной геометрической интерпретации этих величин. И это принесло немедленное облегчение, поскольку загадка была раскрыта и призрак, внушавший мне опасения, оказался совсем не призраком, а частью привычного окружения». (с. 212)

Взаимодействие между алгеброй и геометрией – это еще одна из великих глав в истории математики. Магия школьной аналитической геометрии, которая позволяет нам описывать интригующие геометрические кривые простыми алгебраическими формулами и выявлять скрытые свойства геометрии, решая простые уравнения, в современной математике выросла в могущественную взаимосвязь алгебраического и геометрического мышлений, взаимно укрепляющих друг друга. Рене Декарт заявил: «Я позаимствую все лучшее из геометрического анализа и из алгебры, и исправлю все недостатки первого с помощью второй». Сэр Майкл Атьи, сравнивая геометрическую интуицию с чрезвычайной эффективностью алгебраических методов, написал недавно:

«Алгебра это предложение, сделанное дьяволом математику. Дьявол говорит: Я дам тебе мощный механизм, который ответит на любой твой вопрос. Все, что тебе нужно сделать, это отдать мне свою душу – откажись от геометрии и ты получишь этот удивительный механизм»[1].

Какой такт потребовался от Данцига, чтобы рассказать о тысячелетнем флирте между арифметикой и геометрией, не сглаживая Фаустовы углы этой любовной истории!

В книге Евклида «Элементы геометрии» мы встречаем такое определение прямой: «Определение 2. Прямая это длина без ширины». Теперь мы смотрим на этот важнейший элемент планиметрии немного под другим углом. Мы видим числовую ось, представленную горизонтальной прямой линией, которая продолжается бесконечно в обоих направлениях и на которой все числа: положительные, отрицательные, целые, дробные, или иррациональные – занимают свое место. Чтобы изобразить изменение во времени, мы также обращаемся к грубой модели, временной шкале, снова представленной горизонтальной прямой линией, которая продолжается бесконечно в обоих направлениях, и обозначаем ею совершенную, никогда не постижимую, вечно движущуюся систему прошлого/настоящего/будущего, в которой, как нам кажется, мы живем. История о том, как эти различные концепции *прямой линии* уживаются одна с другой – еще один сюжет в истории Данцига.

Данциг искренне отстаивает свою точку зрения в дискуссии о взаимосвязи времени с математикой. Он противопостав-

---

[1] Atiyah, Sir Michael. *Special article: Mathematics in the 20th Century.* Page 7. Bulletin of the London Mathematical Society, 34 (2002), 1–15.

ляет теорию Кантора, в которой активно используются бесконечные процессы, теорию которую он называет «откровенно динамичной», теории Дедекинда, о которой отзывается как о «статичной». Нигде в определении действительного числа, говорит Данциг, Дедекинд даже «не использует явно ни слово ***бесконечный***, ни такие слова, как ***стремится***, ***возрастает бесконечно***, ***сходится***, ***предел***, ***меньше любой заранее заданной величины*** и тому подобные».

Дочитав до этого места повествование Данцига, мы можем подумать, что мы нашли то, что так долго искали, поскольку Данциг пишет:

«На первый взгляд кажется, что здесь [в определении Дедекинда действительных чисел] мы полностью освободили концепцию числа от гнета интуитивного представления о времени». (с. 156)

Конечно, эта иллюзия «полного освобождения» едва ли выдержит второй взгляд Данцига; и вечные вопросы, касающиеся времени и его математического представления, касающиеся континуума и его взаимосвязи с физическим временем или нашим реальным временем, – проблемы, известные со времен Зенона, – постоянно сопровождают повествование о развитии числа, которое вы читаете.

Данциг спрашивает: Насколько критично мир, научный мир, оценивает влияние математического мира, и наоборот?

«Человек науки будет действовать, как *если бы* этот мир был абсолютным и подчинялся законам, не зависящим от мыслей и действий человека. И когда он открывает закон, удивительный по своей простоте или всеохватности, или закон, указывающий на совершенную гармонию мироздания, то вполне разумно поинтересоваться, какую роль его разум сыграл в этом открытии? Раскрывает ли прекрасный образ, который человек увидел в осколке бесконечности, природу этой бесконечности, или это просто отражение его собственного разума».

Данциг пишет:

«Математика можно сравнить с дизайнером одежды, который довольно часто забывает о тех людях, которым его одежда могла бы подойти. Конечно, его искусство возникло из необходимости одевать этих людей, но это было очень давно; а наша одежда иногда принимает настолько причудливые формы, что кажется созданной ради себя самой. Поэтому нет конца восхитительным сюрпризам!»

Это несколько напоминает по тону знаменитое эссе Юджина Вигнера «Необъяснимая эффективность математики в естественных науках». Но Данциг идет дальше, предлагая читателям свои собственные, глубоко продуманные представления о *субъективной реальности* и *объективной реальности*. Объективная реальность, согласно Данцигу, это впечатляюще большое вместилище, в котором *хранятся* все знания, полученные человечеством (в том числе и данные, полученные при помощи научной аппаратуры). Он принимает определение, которое дал Пуанкаре: «объективная реальность — это то, что общо нескольким мыслящим существам и могло бы быть общо всем», чтобы подготовить плацдарм для своего анализа взаимосвязи между Числом и объективной истиной.

По крайней мере в одном из переопределений этих могущественных слов *субъект* и *объект*, сделанных Иммануилом Кантом, ведущую роль играет такое тонкое понятие, введенное Кантом, как «sensus communis». Так он называл внутренний «общий голос», каким-то образом встроенный в каждого из нас и позволяющий нам предполагать, какие выводы сделает остальная часть человечества.

Объективной реальности Пуанкаре и Данцига, кажется, также необходимо, чтобы мы обладали некой способностью, чем-то вроде внутреннего голоса, который сообщал бы нам что-то о других людях. Объективная реальность Пуанкаре-Данцига — это фундаментальное субъективное согласие о том, что общее или то, что могло бы быть общим, является объективным. Этот взгляд уже предупреждает нас об основополагающем порочном круге, скрывающемся за многими рассуждениями относительно объективности и числа и, в частности, за сентиментальностями эссе Вигнера.

Мы с братом Джо подарили нашему отцу книгу «Число — язык Науки», когда ему было чуть больше 70 лет. У отца не было специального математического образования, но сохранилась пылкая любовь к алгебре, которую он учил в школе. Давным-давно, когда мы были совсем юными, наш отец посвятил нас в некоторые чудеса алгебры. «Я расскажу вам секрет», — начал он заговорщическим голосом. Он рассказал нам, как, используя магическую силу символа *X*, мы сможем найти число, *которое после удвоения и прибавления единицы дает 11.* Я был абсолютно буквально мыслящим малышом и действительно думал, что X — это наш семейный секрет, до тех пор пока меня не вывели из заблуждения об этом присвоении через несколько лет на уроке математики.

Мы удивительно верно выбрали в подарок книгу Данцига. Отец работал над этой книгой, исписал поля замечаниями, вычислениями, толкованиями; он перечитывал ее снова и снова. Он увлекся числами из этой книги; он проверил свои собственные варианты проблемы Гольдбаха и назвал вариациями на тему Гольдбаха. Одним словом, он был в восторге.

И в этом нет ничего удивительного, поскольку книга Данцига захватывает и ум, и душу; это одна из немногих великих книг, в которых популярно излагается классическая математика, действительно доступных каждому.

Барри Мазур

Предисловие редактора серии «Шедевры науки»

Текст этого издания книги основан на четвертом издании, опубликованном в 1954 году. В это издание включены новые предисловие, послесловие, раздел пояснений в конце книги и снабженная комментариями библиография, оригинальные иллюстрации были перерисованы.

Четвертое издание было поделено на две части. Первая часть «Развитие понятия числа» состояла из 12 глав, составляющих текст настоящего издания. Вторая часть «Проблемы старые и новые» была более специализированной, и в ней глубоко обсуждались конкретные концепции. В этом издании сохранены обе части, только теперь вторая часть вынесена из основного текста в приложения и название «часть» убрано из обоих разделов.

Вторая часть книги Данцига содержит меньше описаний и больше формул; в ней меньше рассказывается об идеях и больше о методах, что позволяет Данцигу изложить технические подробности в более сжатой форме. Поэтому к этой части не требуется пояснений и дополнительных комментариев. Можно было бы ожидать, что пятьдесят лет развития математики приведут к необходимости внесения изменений в раздел «Проблемы старые и новые», но это название обманчиво. Проблемы, рассмотренные в этом разделе, не старые и не новые; это подборка классических задач, выбранных автором, чтобы показать, что такое математика.

В предыдущем издании параграфы внутри каждой главы были пронумерованы. Поскольку такая схема нумерации служила лишь для того, чтобы подчеркнуть переход к новой мысли, в данном издании номера параграфов устранены и заменены увеличенным междустрочным интервалом.

Предисловие к четвертому изданию

С тех пор как я написал эту книгу, прошло около четверти века. У меня есть основания считать ее первопроходческой, поскольку *эволюция концепции числа*, хотя и является предметом оживленной дискуссии среди профессиональных математиков, логиков и философов, никогда еще не выносилась на суд широкой публики в качестве вопроса культуры. Действительно, в то время никто не знал, достаточно ли много непрофессионалов интересуется этими вопросами, чтобы издание книги было оправданно. Одобрительная реакция на книгу, как у нас, так и за рубежом, и множество книг примерно по той же тематике, появившихся вслед за ней, развеяли эти сомнения. Существование громадного количества читателей, интересующихся культурными аспектами математики и наук, зависящих от математики, теперь стало подтвержденным фактом.

Автора, находящегося уже в преклонном возрасте, вдохновляет сознание того, что постоянные требования читателей стали причиной нового издания его первой литературной пробы; и именно с таким настроением я подошел к переработке этой книги. Но в процессе работы я чрезвычайно много узнал об удивительных изменениях, которые произошли с момента последнего издания книги. Прогресс в технологии, широкое распространение статистических методов, успехи электроники, появление ядерной физики и, самое главное, возрастающее значение электронных вычислительных машин – все это превосходит ожидания той категории людей, которые косвенно связаны с математической деятельностью; в то же время значительно вырос уровень математического образования. Таким образом, сейчас я столкнусь не просто с более широкой аудиторией, но с гораздо более умудренной и требовательной аудиторией, чем та, к которой я обращался более двадцати лет назад. Эти здравые размышления оказали решающее влияние на план нового издания. Удалось ли мне ответить на вызов, брошенный изменившимся временем, – об этом судить читателю.

За исключением нескольких абзацев, измененных в соответствии с новыми данными, первая часть «Развитие понятия числа» в настоящем издании является дословным воспроизведением первоначального текста. Однако вторая часть «Проблемы старые и новые» – в сущности, новая книга. Более того, хотя в первой части больше рассказывается о концепциях и идеях, все же вторую часть не следует рассматривать как комментарии к первоначальному тексту; она является целостным изложением *истории развития методов и доказательств в теории чисел*. Отсюда можно сделать вывод, что четыре главы раздела «Проблемы старые и новые» более насыщенны в техническом плане, чем все первоначальные двенадцать глав, и это действительно так. С другой стороны, среди рассматриваемых там предметов очень мало тем, представляющих общий интерес, и читатель может легко пропустить технические разделы, не теряя общей нити рассуждений.

Тобиас Данциг

Пасифик Палисейдс (Pacific Palisades)
Калифорния
1-е сентября, 1953 год

Предисловие к первому изданию

Эта книга посвящена идеям, а не методам. Все не относящиеся к делу технические подробности намерено опущены, и, чтобы понять рассматриваемые вопросы, достаточно математической подготовки, полученной в средней школе.

Но хотя эта книга и не предполагает со стороны читателя математического образования, она предполагает нечто более редкостное: способность воспринимать и оценивать идеи.

Более того, хотя в этой книге опущены технические аспекты предмета, она написана не для тех, кого мучает неискоренимый ужас перед символами, и не для тех, кто по своей сущности не видит форм. Это книга по математике: в ней обсуждаются символы и формы, а также идеи, скрывающиеся за символами и формами.

Автор считает, что наша школьная программа, отбрасывая культурное содержание математики и оставляя лишь голый каркас технических подробностей, подавляет многие светлые умы. Цель этой книги – восстановить это культурное содержание и представить эволюцию числа как часть истории человечества, чем она, собственно, и является.

Это не книга по истории предмета. Однако исторический подход использовался много раз, чтобы выявить ту роль, которую интуиция сыграла в развитии математических концепций. История числа здесь разворачивается как историческая процессия идей, связанных с людьми, которые создавали эти идеи, и эпохами, порождавшими этих людей.

Можно ли фундаментальные вопросы науки о числе представить без привлечения всего хитроумного аппарата этой науки? Я верю, что это можно сделать, и заявляю об этом своей книгой. Судить будет тот, кто прочитает!

Тобиас Данциг

Вашингтон, федеральный округ Колумбия
3 мая, 1930 года

ГЛАВА 1

ОТПЕЧАТКИ ПАЛЬЦЕВ

> Год Римлян кончался, когда десять раз луна обернется:
> Десять считали они самым почетным числом;
> Иль потому, что у нас на руках десять пальцев для счета,
> Иль что в десятом всегда месяце жены родят,
> Иль что десятка у нас граница во всех исчисленьях
> И начинаем опять с новой десятки мы счет.
>
> *Овидий*, Фасты, III
> *(Перевод Ф. Петровского)*

Человек, даже на самых ранних стадиях развития, обладает даром, который я, за неимением лучшего названия, назову *чувством числа*. Этот дар позволяет ему осознавать, что в небольшом наборе объектов что-то изменилось, когда достоверно неизвестно, устранен какой-то объект или добавлен к набору.

Чувство числа не нужно путать со счетом, который, вероятно, является более поздним приобретением и предполагает, как мы увидим, более сложные умственные процессы. Счет, насколько известно, является отличительным признаком человека, хотя некоторые виды животных, кажется, обладают зачаточным чувством числа, похожим на наше. Во всяком случае, таково мнение компетентных наблюдателей за поведением животных, и эта теория подтверждается значительным количеством фактов.

Многие птицы, к примеру, обладают таким чувством числа. Если в гнезде лежит четыре яйца, то одно, не рискуя, можно взять, но если убрать два, то птица, скорее всего, покинет гнездо. Каким-то непостижимым образом птица может отличить два от трех. Но эта способность присуща не только птицам. Фактически, самым поразительным примером, который мы знаем, является такое насекомое, как «пилюльная оса». Матка откладывает яйца в отдельные ячейки, причем в каждую ячейку она кладет несколько живых гусениц, которыми будет питаться личинка после того как вылупится. Количество жертв остается удивительно постоянным для данного вида ос: одни виды кладут 5 гусениц, другие — 12, а еще одни – в два раза больше, т.е. 24 гусеницы в одну ячейку. Но самым удивительным примером является разновидность ос *Genus Eumenus*, у которых мужская особь намного меньше женской. Каким-то непостижимым способом матка узнает, мужского или женского пола будет личинка, и соответственно выделяет количество еды; она не изменяет вид или размер гусениц, но мужским особям она оставляет пять жертв, а женским – десять.

Закономерность в действиях ос и то, что их действия связаны с фундаментальной функцией в жизни насекомых, делают этот последний пример менее убедительным, чем следующий. Здесь действия птицы кажутся почти сознательными:

Один землевладелец решил застрелить ворону, которая свила гнездо на сторожевой башне его имения. Неоднократно он пытался застать птицу врасплох, но безуспешно: как только он приближался, ворона оставляла свое гнездо. На отдаленном дереве она настороженно выжидала, пока человек покинет башню, а затем возвращалась к гнезду. Однажды землевладелец придумал хитрость: два человека вошли в башню, один остался внутри, а другой вышел из башни и ушел. Но птица не обманулась, она держалась поодаль, пока не ушел и второй человек. В последующие дни эксперимент повторили с двумя, тремя, затем с четырьмя людьми, и все безуспешно. Наконец в башню направилось пять человек; как и прежде, все вошли, один остался в башне, тогда как четверо вышли и ушли. И тут ворона сбилась со счета. Она не смогла отличить четыре от пяти и сразу же вернулась в свое гнездо.

Против таких доказательств можно выдвинуть два аргумента. Во-первых, видов животных, обладающих таким чувством числа, чрезвычайно мало; среди млекопитающих их не найдено вообще, и, кажется, даже обезьяны лишены такой способности. Вторым аргументом является то, что во всех известных случаях чувство числа у животных так ограниченно по объему, что им можно пренебречь.

Первое можно понять. В самом деле, примечательно, что способность воспринимать числа в той или иной форме присуща только некоторым насекомым и птицам, а также людям. В наблюдениях и экспериментах над собаками, лошадьми и другими домашними животными не удалось выявить у них никакого чувства чисел.

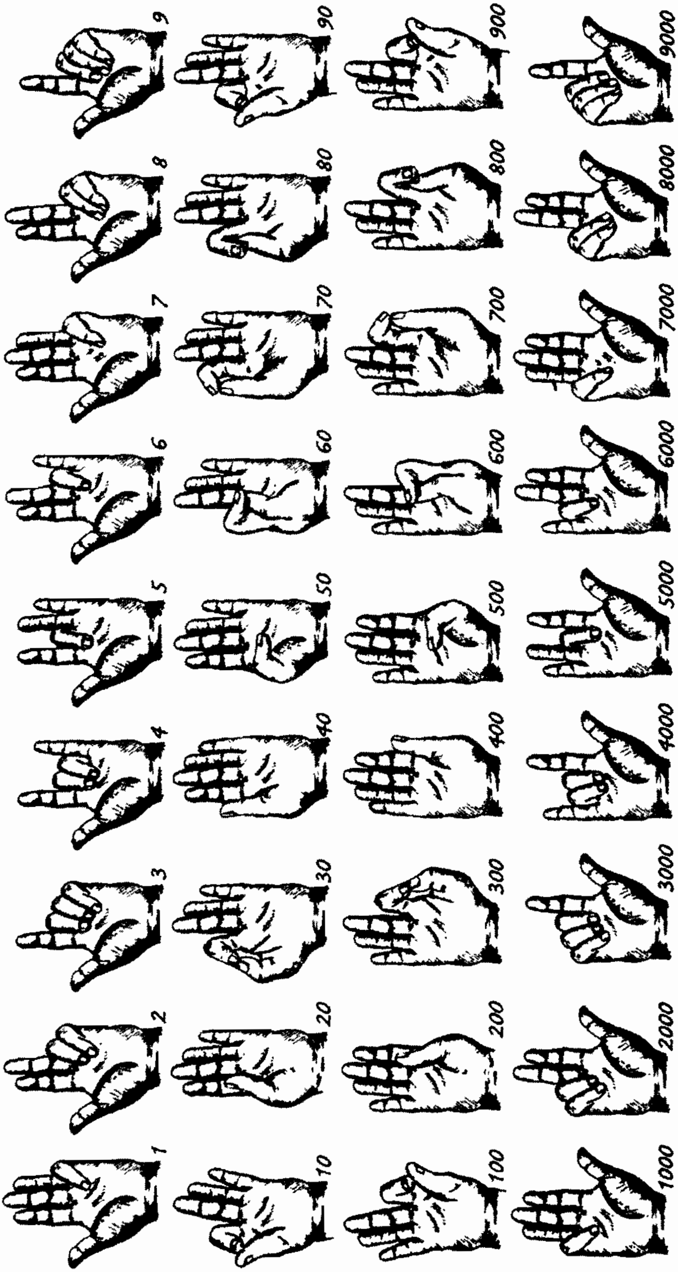
Второй аргумент не имеет большого значения, поскольку чувство числа у человека также очень ограниченно по объему.

На практике, когда цивилизованному человеку приходится различать числа, он сознательно или бессознательно помогает непосредственному чувству числа такими уловками, как распознавание симметрии, мысленная группировка или счет. *Счет* в особенность до такой степени стал неотъемлемой частью наших мыслительных процессов, что психологические тесты на восприятие чисел сталкиваются с серьезными трудностями. Тем не менее в этой области достигнут некоторый прогресс; тщательно выполненные эксперименты привели к неизбежному заключению, что *визуальное* чувство числа среднего цивилизованного человека редко выходит за пределы четырех, а *тактильное* чувство числа еще более ограниченно по объему.

Это в значительной степени подтверждается антропологическими исследованиями людей, находящихся в первобытном состоянии. Обнаружено, что представители тех сообществ, *которые еще не достигли стадии счета на пальцах*, почти полностью лишены всякого восприятия числа. Такие эксперименты проводились в различных племенах, живущих в Австралии, на островах южных морей, в Южной Америке и в Африке. Этнограф Керр, проводивший всесторонние исследования аборигенов Австралии, утверждает, что лишь немногие из них могут отличить число четыре, и никто из австралийцев, живущих в условиях первобытного общества, не может распознать число семь. У бушменов Южной Африки есть только три цифровых слова: *один*, *два* и *много*, и эти слова такие невнятные, что можно усомниться, приписывают ли аборигены этим словам ясное значение.

У нас нет причин верить и есть множество причин сомневаться в том, что у наших далеких предков дела обстояли лучше; практически все европейские языки несут на себе отпечатки таких ограничений в древности. Английское слово *thrice*, как и латинское *ter*, имеет два значения: «трижды» и «много». Безусловно, существует связь между латинскими словами *tres* – т.е. «три» и *trans* – «далеко», «за пределами». То же самое можно сказать о французских словах *tres* – «очень» и *trios* – «три».

Происхождение числа спрятано за непроницаемым покровом в глубине веков. Родилось ли это понятие из опыта, или накопление опыта просто способствовало проявлению того, что неявно уже присутствовало в скрытой форме в глубине древнего разума – это увлекательный предмет для метафизических рассуждений и именно поэтому выходит за пределы вопросов, обсуждаемых в этой книге.



Как показывать числа при помощи пальцев (из руководства, опубликованного в 1520 году)

Если судить о наших далеких предках по уровню умственного развития современных племен, нам придется сделать вывод, что начало было чрезвычайно скромным. Современное понятие развилось из рудиментарного чувства числа, не большего по объему, чем то, которым обладают птицы. И нет сомнений, что оставшись с этим непосредственным восприятием числа, человек продвинулся бы не дальше в искусстве счета, чем птицы. Но благодаря целому ряду примечательных обстоятельств, человек научился подкреплять свое чрезвычайно ограниченное восприятие чисел, используя находки, которым суждено было оказать громадное влияние на всю его жизнь в будущем. Такой находкой стал счет, и именно счету мы обязаны удивительным прогрессом, которого мы достигли в стремлении выразить вселенную числом.

Существуют первобытные языки, в которых есть название для каждого цвета радуги, но нет слова, обозначающего «цвет»; существуют и другие, в которых есть названия чисел, но нет слова «число». То же самое справедливо и в отношении других понятий. В английском языке есть множество исконно присущих ему слов для обозначения определенных видов наборов; *flock*, *herd*, *set*, *lot*, *bunch* — все эти слова применяются в конкретных случаях: стадо, толпа, группа, пучок и т.д.; при том что слова *aggregate*, *collection*, т.е. *совокупность*, *множество* — заимствованные.

Конкретное предшествует абстрактному. «Потребовалось много веков, чтобы обнаружить, — говорит Бертран Рассел, — что и пара фазанов, и пара дней — все это примеры числа два». До наших дней в английском языке существует несколько способов выразить понятие *два*: pair, couple, set, team, twin, brace и т.д., т.е. пара, двойка, двойня, чета и т.п.

Поразительным примером чрезвычайной конкретности исходного понятия числа может служить язык индейцев цимшиан в Британской Колумбии. В нем существует семь различных наборов числительных: один для плоских предметов и животных; второй для круглых предметов и времени; третий для счета людей; четвертый для длинных предметов и деревьев; пятый для каноэ; шестой для мер и седьмой для счета предметов, которые нельзя точно определить. Последние, вероятно, являются недавним достижением; все остальные пришли из более древних времен, когда представители племени еще не научились считать.

Именно счет объединил конкретные и, следовательно, разнородные понятия множественности, характерные для первобытных людей, в *однородное понятие абстрактного числа*, без которого невозможна математика.

Хотя это может показаться странным, но можно прийти к логическому, ясному понятию числа, не привлекая счет.

Мы входим в зал. Перед нами два набора: места в аудитории и студенты. *Не считая*, мы можем установить, равны ли эти наборы, и если неравны, то какой из них больше. Если все места заняты и никто не стоит, мы *знаем, не считая*, что два набора равны. Если все места заняты и кто-то в аудитории стоит, мы *знаем, не считая*, что студентов больше, чем мест.

Мы узнали об этом, используя понятие, которое господствует во всей математике и получило название *взаимно однозначное соответствие*. Процесс установления взаимно однозначного соответствия заключается в сопоставлении каждому объекту из одного множества объекта из другого множества. Этот процесс продолжается до тех пор, пока одно из множеств или оба не будут исчерпаны.

Техника счета многих первобытных племен ограничена именно таким сопоставлением или установлением соответствия. Они хранят информацию о своих стадах и войсках при помощи зарубок на дереве или камней в куче. О том, что наши собственные предки были сведущи в таких методах, свидетельствует этимология слов *tally* и *calculate*, из которых первое произошло от латинского *talea* – «зарубка» и второе от латинского *calculus* – «камень».

На первый взгляд, кажется, что метод установления соответствий годится только для сравнения двух наборов, но не для создания чисел в абсолютном значении этого слова. Однако переход от относительных чисел к абсолютным не сложен. Необходимо только создать *эталонные наборы*, с которыми затем сравнивать каждый из исследуемых наборов. Оценка любого заданного набора тогда сводится к выбору подходящего эталонного набора, каждому элементу которого можно сопоставить элемент из исследуемого набора.

Первобытный человек обнаруживает такие эталонные наборы непосредственно вокруг себя: крылья птицы могут обозначать число два, листья клевера – три, ноги животного – четыре, пальцы его собственной руки – пять. Свидетельства именно такого происхождения числительных можно найти во многих примитивных языках. Конечно, после того как *числительное* создано и принято, оно становится таким же хорошим эталонным набором, как и тот объект, который оно первоначально представляло. Необходимость отличать объект, у которого позаимствовано название, от названия самого числа, естественно привела к изменению звучания слов, и с течением времени связь между названиями была забыта. По мере того как человек учится все более полагаться на свой язык, образы вытесняются обозначающими их звуками и исходно конкретные объекты принимают абстрактную форму названий чисел. Память и привычка придают конкретность этим абстрактным формам; так простые слова становятся мерой множественности.

Только что описанное понятие называется *количественным* числом. Количественное число основано на принципе соответствия; оно не предполагает *счета*. Для создания счета недостаточно иметь совокупность составленных из различных элементов модельных наборов, насколько бы полной такая совокупность ни была. Необходимо разработать *систему* чисел: наши модельные наборы должны быть выстроены в упорядоченную последовательность, такую что порядок следования в ней определяется возрастанием величины, т.е. в *натуральный ряд*: один, два, три... После того как подобная система создана, *пересчитать* количество элементов в наборе означает присваивать последовательно каждому элементу набора число натурального ряда *в порядке возрастания* до тех пор, пока набор не будет исчерпан. Число, присвоенное последнему элементу набора, называется *порядковым числом* набора.

Система счета, основанная на порядковых числах, может принимать конкретную форму четок, но это, конечно, не обязательно. *Порядковая* система начинает существовать после того, как слова, обозначающие несколько первых чисел, остаются в памяти людей как *упорядоченная последовательность* и возникает фонетическая схема, позволяющая для каждого сколь угодно большого числа получать *последующее* число.

Мы с такой легкостью научились переходить от количественных числительных к порядковым, что два подхода слились для нас в один. Чтобы определить количество элементов в наборе, т.е. ее порядковое число, нам больше не нужно искать подходящий модельный набор с соответствующим количеством элементов – мы можем просто *посчитать*. Тем, что мы научились отождествлять два подхода к числу, обусловлен наш прогресс в математике. Хотя на практике нам действительно нужны количественные числа, они не позволяют создать арифметику. Арифметические действия основаны на неявно подразумеваемом предположении, что *мы всегда можем от любого числа перейти к последующему*, и именно в этом заключается суть концепции порядковых чисел.

Итак, сопоставление само по себе не позволяет создать искусство вычислений. Без нашей способности выстраивать вещи в упорядоченную последовательность прогресс был бы незначительным. Соответствие и порядок следования — два принципа, пронизывающие всю математику, более того, все области точного мышления вплетены в саму ткань нашей системы счисления.

Теперь естественно поинтересоваться, повлияло ли это тонкое различие между количественными и порядковыми числами на начальную историю понятия числа. Хочется предположить, что количественные числа, основанные на принципах сопоставления, появились раньше порядковых, для которых требуется и сопоставление, и упорядочивание. Однако самые тщательные исследования первобытной культуры и филологии не выявили такой закономерности. Повсюду, где существует хотя бы какая-нибудь техника счета, обнаружены оба подхода к числам.

Однако также повсюду, где существует хоть какая-то техника счета, достойная этого названия, обнаруживается, что ей предшествовала или параллельно с ней существует техника *счета на пальцах*. Пальцы человека — это и есть тот инструмент, который позволяет ему незаметно перейти от количественных чисел к порядковым. Если человек хочет показать, что какой-то набор содержит четыре элемента, то он *одновременно* загнет или оттопырит четыре пальца. Если же он захочет сосчитать, сколько элементов в том же самом наборе, он будет разгибать или загибать пальцы *последовательно*. В первом случае он использует свои пальцы как количественный модельный набор, во втором — как порядковую систему. Несомненные указания на такое происхождение счета видны практически в каждом примитивном языке. В большинстве из них слово «пять» звучит так же, как «рука», слово десять — как «две руки» или, иногда, как «человек». Более того, во многих примитивных языках слова, обозначающие числа от одного до четырех, идентичны названиям соответствующих пальцев.

Более развитые языки подверглись процессу истирания, в результате которого потерялось первоначальное значение слов. Однако и в них можно найти «отпечатки пальцев». Сравните слово на санскрите *pantcha*, что означает пять, с соответствующим персидским *pentcha* — «рука»; русское *пять* и слово «пясть», означающее раскрытую ладонь с пятью пальцами.

Именно своим *десяти гибким пальцам* человек обязан своими успехами в вычислениях. Именно эти пальцы научили его считать и таким образом расширили возможность счета до бесконечности. Без этого приспособления техника счета человека не продвинулась бы далеко за пределы зачаточного чувства числа. Поэтому обоснованно можно предположить, что без пальцев безнадежно затормозилось бы развитие понятия числа и, следовательно, точных наук, которым мы обязаны нашим материальным и интеллектуальным прогрессом.

Хотя наши дети все еще учатся считать на пальцах и мы сами иногда прибегаем к жестикуляции в разговоре, чтобы подчеркнуть свою мысль, все же искусство счета на пальцах практически утеряно современным цивилизованным человечеством. Развитие письма, упрощение исчисления и повсеместное образование сделали это искусство устаревшим и ненужным. В таких условиях вполне естественно недооценивать роль, которую сыграл счет на пальцах в истории развития методов счета. Всего несколько сот лет назад он был так широко распространен в Западной Европе, что ни одно руководство по арифметике не могло считаться полным без подробных объяснений, как пользоваться этим методом (см. с. 16).

Умение использовать свои пальцы для счета и для выполнения простых арифметических действий было тогда одним из признаков образованного человека. При разработке правил сложения и умножения чисел с помощью собственных пальцев была продемонстрирована величайшая находчивость. Так, до наших дней крестьяне в центральной Франции (Оверни) используют удивительный метод для умножения чисел больших пяти. Если нужно умножить 9 × 8, они загибают 4 пальца на левой руке (4 указывает насколько 9 больше, чем 5) и 3 пальца на правой руке (8 − 5 = 3). После этого количество загнутых пальцев показывает количество десятков результата (4 + 3 = 7), а произведение не загнутых пальцев дает количество единиц (1 × 2 = 2).

Аналогичные изобретения можно найти в самых различных местах, таких как Бессарабия, Сербия или Сирия. Их удивительная схожесть и тот факт, что все эти страны входили когда-то в состав великой Римской Империи, наводят на мысль о римском происхождении этих методов. Однако с равной степенью правдоподобности можно утверждать, что эти методы развились независимо, поскольку похожие условия приводят к похожим результатам.

И в наши дни значительная часть человечества считает на пальцах; мы должны помнить, что для людей, живущих в условиях первобытного общества, это единственный способ выполнения простых вычислений в их повседневной жизни.

Сколько лет языку чисел? Невозможно точно указать период, когда возникли числительные, однако существуют несомненные доказательства того, что это произошло за много тысячелетий до появления письменной истории. Один факт уже был упомянут: все следы первоначальных значений числительных, за исключением, может быть, слова *пять*, в европейских языках утеряны. Это тем более примечательно, что словам, обозначающим числа, как правило, свойственна чрезвычайная устойчивость. Несмотря на то, что с течением времени происходят радикальные изменения во многих областях языка, словарь чисел остается практически неизменным. Филологи используют эту устойчивость, чтобы определять степень родства между предположительно отдаленными группами языков. Читатель может ознакомиться с таблицей в конце этой главы, где приведены для сравнения названия цифр в языках, принадлежащих к индоевропейской группе.

Почему же, несмотря на такую стабильность, мы не можем найти никаких следов первоначальных значений этих слов? Можно предположить, что слова, обозначающие числа, остались неизменными с момента своего возникновения, а названия конкретных предметов, позаимствованные для числительных, полностью трансформировались.

Что же касается структуры языка чисел, то филологические исследования выявили ее почти повсеместное единообразие. Везде, во всех языках, десять пальцев человека оставили свой неизменный отпечаток.

В самом деле, нет сомнений, что наши десять пальцев повлияли на «выбор» основания системы счисления. Во всех языках индоевропейской группы, а также в семитских, монгольских и многих примитивных языках основанием исчисления является число десять; т.е. существуют независимые названия чисел вплоть до десяти, а свыше десяти и до 100 используется некий принцип составления. Во всех этих языках есть независимые названия для 100 и 1000, а в некоторых и для более высоких степеней числа десять. Существуют и обманчивые исключения, такие как английские слова *eleven* и *twelve* или немецкие *elf* и *zwölf*, но эти слова произошли от *ein-lif* и *zwo-lif*, а *lif* на старонемецком означает десять.

Необходимо также сказать, что кроме основания десять достаточно широко распространены еще два основания системы счисления; но и их отличительные свойства подтверждают в значительной степени *антропоморфную* природу нашей системы счета. Эти две системы — пятеричная система с основанием 5 и двадцатеричная с основанием 20.

В *пятеричной* системе существуют независимые названия чисел вплоть до *пяти*, а составные начинаются дальше. (См. таблицу в конце главы.) Такая система, очевидно, зародилась среди людей, которые привыкли считать на пальцах одной руки. Но почему люди ограничили себя счетом на одной руке? Возможное объяснение состоит в том, что человек, живущий в первобытном обществе, редко ходит безоружным. Если он хочет что-то сосчитать, он берет оружие под мышку, как правило левой руки, и считает на своей левой руке, используя свою правую руку для отметки. Этим можно объяснить, почему правши почти всегда используют для счета левую руку.

Многие языки несут на себе следы пятеричной системы, и естественно предположить, что некоторые десятичные системы счисления прошли через этот этап. Некоторые филологи утверждают, что даже числительные индоевропейских языков имеют пятеричное происхождение. Эти филологи указывают на греческое слово *pempazein*, которое означает считать пятерками, а также на бесспорно пятеричный характер римских числительных. Однако других подтверждений этого факта нет, и гораздо более вероятно, что языки нашей группы предварительно прошли этап *двадцатеричной* системы.

Эта система, вероятно, зародилась в первобытных племенах, где на пальцах ног считали так же, как и на пальцах рук. В качестве самого поразительного примера можно привести систему, которую использовали индейцы майя в Центральной Америке. Аналогичная система в древности была и у ацтеков: день они делили на 20 часов, а подразделение их армии состояло из 8000 воинов ($8000 = 20 \times 20 \times 20$).

Хотя в чистом виде двадцатеричная система встречается редко, есть множество языков, в которых десятеричная и двадцатеричная системы сливаются. В английском языке есть слова *score* (20), *two-score* (40), *three-score* (60); во французском — *vingt* (20) и *quatre-vingt* (4 × 20). Ранее во Франции эта форма использовалась чаще. Госпиталь в Париже, первоначально построенный для 300 слепых ветеранов, имеет старомодное и необычное название *Quinze-Vingt* (15 × 20), а название *Onze-Vingt* (11 × 20) дано корпусу сержантов-полицейских, состоящему из 220 человек.

В первобытных племенах Австралии и Африки используется система счисления с основанием не 5, не 10 и не 20. Это *двоичная* система, т.е. ее основанием является 2. Эти племена еще не достигли стадии счета на пальцах. У них есть независимые названия для чисел «один» и «два» и составные до шести. А все, что свыше шести, обозначается словом «много».

Керр, на которого мы уже ссылались в связи с австралийскими племенами, утверждает, что большинство из них считает парами. Их привычка считать таким способом настолько сильна, что если из семи булавок, расположенных в ряд, убрать две, то абориген может этого и не заметить; однако если исчезнет одна булавка, он сразу же об этом узнает. Его чувство *парности* сильнее, чем чувство числа.

Достаточно удивительно, что эта простейшая система счисления в относительно недавние времена приобрела такого выдающегося защитника, как Лейбниц. В двоичном исчислении используются всего два символа: 0 и 1, посредством которых выражаются все остальные числа, как показано в следующей таблице:

Десятичная система	1	2	3	4	5	6	7	8
Двоичная система	1	10	11	100	101	110	111	1000
Десятичная система	9	10	11	12	13	14	15	16
Двоичная система	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

Преимуществом системы *с основанием два* является минимальное количество необходимых символов и чрезвычайная простота вычислений. Следует помнить, что каждая система счисления требует хранения в памяти таблиц сложения и умножения. Для двоичной системы такие таблицы сводятся к двум правилам: $1 + 1 = 10$ и $1 \times 1 = 1$; в то время как для десятичной системы каждая из таблиц требует 100 ячеек. Однако это преимущество в значительной степени компенсируется отсутствием краткости; так, десятичное число $4096 = 2^{12}$ в двоичной системе выглядит как 1 000 000 000 000.

Именно загадочная утонченность двоичной системы заставила Лейбница воскликнуть: *Omnimbus ex nihil ducendis sufficit unum* (Единицы достаточно, чтобы вывести все из ничего). Лаплас сказал:

«Лейбниц видел в двоичной системе прообраз Творения... Ему представлялось, что единица представляет Божественное начало, а ноль – небытие и что Высшее Существо создает все сущее из небытия, точно так же как единица и ноль в его системе выражают все числа. Эта концепция так понравилась Лейбницу, что он сообщил о ней иезуиту Гримальди — президенту китайского общества математиков, в надежде, что этот образ Творения поможет обратить в христианство императора Китая, который очень увлекался науками. Я говорю об этом только лишь для того, чтобы показать, как детские предубеждения могут затмить взор даже такого великого человека!»

Интересно порассуждать, как изменилась бы история культуры, если бы вместо гибких пальцев у человека было только две неподвижные конечности. Если бы в таких условиях все же возникла какая-либо система счисления, то, скорее всего, она была бы двоичной.

То, что человечество приняло десятичную систему счисления, — это *физиологическая случайность.* Тем, кто во всем видит руку Провидения, придется признать, что с математикой у Провидения плохо. Кроме того, что эта система наиболее удобна с физиологической точки зрения, она мало чем привлекает. Почти любая другая система, за исключением, быть может, *девятеричной*, была бы так же хороша, а вероятно лучше.

В самом деле, если бы выбор был предоставлен группе экспертов, то мы стали бы свидетелями конфликта между людьми практичными, которые настаивали бы на числе с возможно большим количеством делителей, таким как *двенадцать*, и математиками, которые захотели бы выбрать в качестве основания простое число, такое как *семь* или *одиннадцать.* Действительно, в конце восемнадцатого века великий естествоиспытатель Бюффон предложил повсеместно использовать двенадцатеричную систему счисления. Он указывал на тот факт, что у числа 12 есть четыре делителя, в то время как у 10 их только 2, и утверждал, что в течение веков этот недостаток десятичной системы ощущался настолько остро, что, несмотря на то что универсальным основанием было число *десять*, большинство мер состоит из 12 частей.

С другой стороны, великий математик Лагранж заявлял, что простое число в качестве основания системы счисления намного предпочтительнее. Он указывал на тот факт, что в этом случае все дроби по основанию системы счисления будут несократимыми и поэтому числа будут представлены единственным образом. Например, в нашей нынешней системе счисления десятичная дробь 0,36 обозначает в действительности много дробей: 36/100,18/50 и 9/25... Считается, что такая неопределенность уменьшилась бы, если бы в качестве основания было принято простое число, как например, одиннадцать.

Но на чем бы ни остановилась группа экспертов, которой мы доверили выбор основания системы, на простом числе или на составном бы, можно гарантировать, что число *десять* вообще не рассматривалось, поскольку оно не простое и не имеет достаточного количества делителей.

В наше время, когда вычислительные устройства почти совершенно вытеснили расчеты в уме, никто не воспринимает такие предположения всерьез. Преимущества были бы так незначительны, а традиции счета десятками настолько сильны, что проблема кажется смехотворной.

С точки зрения истории культуры, изменение основания, вызванное даже практическими соображениями, было бы крайне нежелательно. Ведь пока человек считает десятками, его десять пальцев напоминают ему о человеческом происхождении этой наиболее важной области мышления. Так может быть, десятичная система счисления призвана служить живым напоминанием о том, что:

Человек — мера всех вещей.

Числительные некоторых индоевропейских языков, иллюстрирующие чрезвычайную устойчивость названий чисел

	Санскрит	**Древнегреческий**	**Латынь**	**Немецкий**	**Английский**	**Французский**	**Русский**
1	eka	en	unus	eins	one	un	один
2	dva	duo	duo	zwei	two	deux	два
3	tri	tri	tres	drei	three	trois	три
4	catur	tetra	quatuor	vier	four	quatre	четыре
5	panca	pente	quinque	fünf	five	cinq	пять
6	sas	hex	sex	sechs	six	six	шесть
7	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	семь
8	asta	octo	octo	acht	eight	huit	восемь
9	nava	ennea	novem	neun	nine	neuf	девять
10	daca	deca	decem	zehn	ten	dix	десять
100	cata	ecaton	centum	hundert	hundred	cent	сто
1000	sehastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	тысяча

Типичная пятеричная система: язык эпи, острова Новые Гебриды

	Слово	**Смысл**
1	tai	
2	lua	
3	tolu	
4	vari	
5	luna	рука
6	otai	второй раз один
7	olua	"—" два
8	otolu	"—" три
9	ovair	"—" четыре
10	luna lua	две руки

Типичная двадцатеричная система: язык майя, Центральная Америка

1	hun	1
20	kal	20
20^2	bak	400
20^3	pic	8000
20^4	calab	160 000
20^5	kinchel	3 200 000
20^6	alce	64 000 000

Типичная двоичная система: язык Западного племени, Торресов пролив

1 urapun	3 okosa-urapun	5 okosa-okosa-urapun
2 okosa	4 okosa-okosa	6 okosa-okosa-okosa

ГЛАВА 2

ПУСТАЯ ПОЛОСА

> Индия дала нам остроумный метод выражения всех чисел посредством десяти знаков, причем, кроме величины каждого знака, имеет значение и его расположение. Эта глубокая и важная мысль кажется нам настолько простой, что мы не замечаем ее истинных достоинств, но ведь сама ее простота и большая легкость, которую она придала всем вычислениям, делают нашу арифметику одним из самых полезных изобретений. Мы оценим все величие этого достижения, когда вспомним, что мимо него прошел даже гений Архимеда и Апполония, двух величайших людей древности.
>
> *Лаплас*

В то время как я пишу эти строки, у меня в голове звучит старый припев:

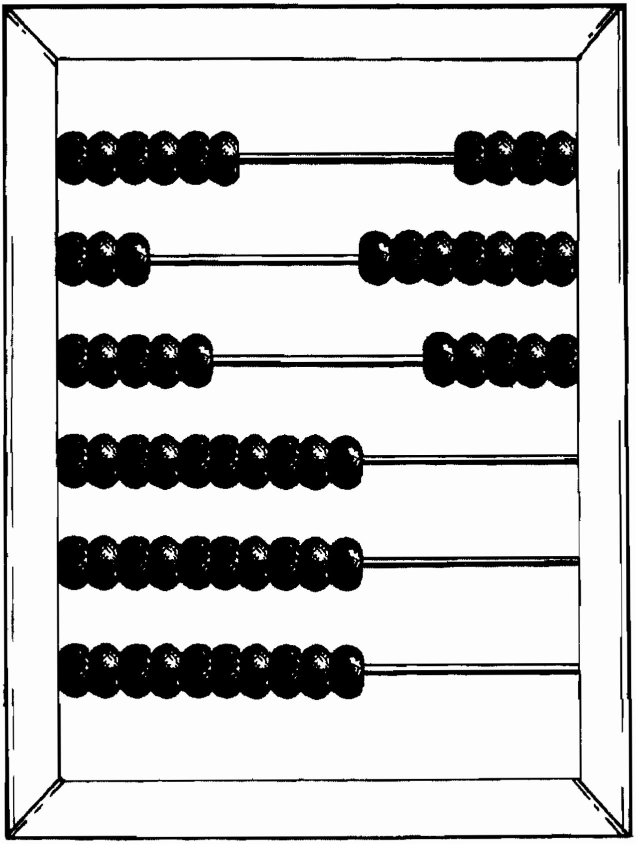
«Reading, 'Riting, 'Rithmetic
Taught to the tune of a history-stick»

(Чтение, Письмо, Арифметику
Учили под мелодию ивовых прутьев).

В этой главе я намереваюсь рассказать историю об одном из этих предметов; о том, который хоть и является самым древним, но достался человечеству труднее всего.

Это не рассказ о гениальном достижении, героических подвигах или благородных жертвах. Это история о блуждании вслепую и случайном открытии, о передвижении на ощупь в темноте и отказе впустить свет. Эта история насыщена мракобесием и предубеждениями, в ней рассказывается о том, как здравый взгляд на вещи часто затмевался верностью традициям и рабской приверженностью старым привычкам. Короче говоря, это история о людях.

Письменная запись чисел, возможно, так же стара, как и частная собственность. Нет сомнений, что она возникла из желания человека записать, сколько голов в его стаде или сколько у него товаров.



Схематическое изображение счетной доски

Зарубки на дереве, царапины на камнях, отпечатки в глине — все это ранние формы стремления человека записать числа при помощи символов. Археологические исследования указывают на существование таких записей с незапамятных времен, поскольку они были найдены в пещерах первобытных людей в Европе, Африке и Азии. Система счисления, по крайней мере, так же стара, как и письменность, и существуют свидетельства, что она возникла даже раньше. Может быть даже, запись чисел навела на мысль о записи звуков.

Самые древние записи, указывающие на систематическое использование чисел на письме, принадлежат древним шумерам и египтянам. Эти записи относятся примерно к одной и той же эпохе, около 3500 лет до нашей эры. Когда мы их исследуем, нас поражает чрезвычайная схожесть используемых принципов. Естественно, нельзя исключить возможности, что эти люди общались между собой, несмотря на значительные разделявшие их расстояния. Хотя, более вероятно, что и у тех и у других эти системы счисления развивались по линии наименьшего сопротивления, т.е. их системы счисления являются всего лишь развитием естественного процесса счёта (см. рис. на с. 32).

В самом деле, в клинописи Древнего Вавилона, в иероглифах на древнеегипетских папирусах и в необычных символах древнекитайских записей — везде мы определенно обнаруживаем *количественный* подход. Каждое число вплоть до 9 представляло собой просто набор штрихов. Тот же самый принцип использовался для чисел свыше девяти. Единицы старших разрядов, такие как десятки, сотни, тысячи и т.д., обозначались специальными символами.

Происхождение английской счетной палочки не ясно, но, скорее всего, она очень древняя; на ней тоже лежит отпечаток количественного подхода. Схематическое изображение палочки приведено на рисунке. Каждая маленькая зарубка на ней означает фунт стерлингов, следующие по размеру — 10 фунтов, 100 фунтов и т.д.

Удивительно, что английская счетная палочка просуществовала много веков, несмотря на то что введение современной нумерации сделало ее использование смехотворно устаревшим. Фактически она несет ответственность за один из важных эпизодов в истории Парламента. Чарльз Диккенс с неподражаемым сарказмом описывает этот эпизод в своей речи по поводу административной реформы через несколько лет после произошедшего события.

«Много-много лет тому назад в Государственном казначействе завели дикарский обычай вести счет по зарубкам на палочках, такая бухгалтерия напоминала календарь, по которому Робинзон Крузо вел счет дням на своем необитаемом острове... Родились, а затем и умерли бесчисленные счетоводы, бухгалтеры, статистики и математики, а ведомственные рутинеры все продолжали цепляться за эти палочки с зарубками, словно то были столпы конституции, и счет в Казначействе по-прежнему велся по дощечкам из вяза, называемым бирками. В конце царствования Георга Третьего какой-то неугомонный смутьян высказал мысль, что в стране, где имеются перья, чернила и бумага, грифельные доски и несколько систем бухгалтерии, такое неуклонное следование варварскому обычаю, пожалуй, граничит с нелепостью. Прослышав о столь смелой и оригинальной гипотезе, вся красная тесьма в правительственных ведомствах покраснела еще пуще, и только в 1826 году эти палки были наконец упразднены. В 1834 году кто-то обнаружил, что их скопилось изрядное количество, и тогда встал вопрос: куда девать эти старые, наполовину сгнившие, источенные червями куски дерева?.. Бирки хранились в Вестминстере, и всякому из нас, частных лиц, естественно, пришло бы в голову, что ничего нет легче, как распорядиться, чтобы кто-нибудь из многочисленных бедняков, проживающих по соседству, унес их себе на дрова. Но нет: от этих бирок никогда не было пользы, и ведомственные рутинеры не могли допустить, чтобы от них хоть когда-нибудь проистекла польза, а посему был отдан приказ – тайно и конфиденциально бирки сжечь. Случилось так, что их стали жечь в одной из печей в палате лордов. От печи, битком набитой этими палками, загорелась панель; от панели загорелась вся палата лордов, от палаты лордов загорелась палата общин; обе палаты сгорели дотла; призвали архитекторов и велели им выстроить две новых палаты; и расходы на эту постройку уже перевалили за второй миллион фунтов стерлингов».

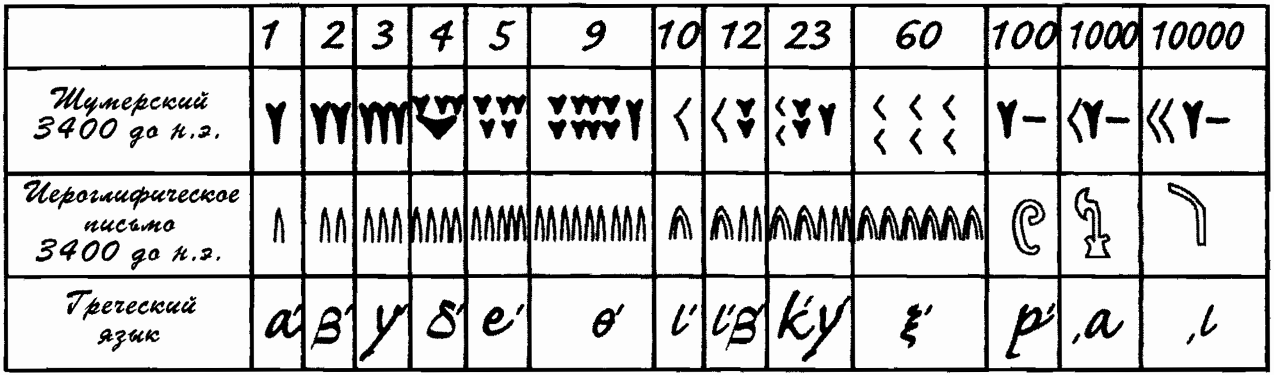
(Собрание сочинений Чарльза Диккенса. Статьи и речи. Перевод М. Лорие)

В противоположность этому чисто количественному характеру самых древних записей существует порядковая система записи, при которой цифры обозначаются буквами алфавита в той последовательности, в которой они произносятся.

Наиболее ранние свидетельства использования такого принципа обнаружены в нумерации финикийцев. Возможно, это связано с тем, что сложности растущей торговли требовали более компактной записи. Нет сомнений в том, что методы записи чисел как греков, так и иудеев основаны на системе финикийцев: эта система была позаимствована целиком, вместе с алфавитом, и даже названия букв остались без изменений.

С другой стороны, римская система записи, которая дожила до наших дней, демонстрирует явное возвращение к количественному подходу. Однако греческое влияние заметно в буквенных символах, принятых для некоторых чисел, таких как X для десяти, C – для ста, M – для тысячи. Но замена букв более образными символами халдеев или египтян не означает отклонения от принципа.

Итак, эволюция систем счисления в античности нашла свое окончательное выражение в порядковой системе греков и количественной системе римлян. Какая из систем лучше? Вопрос имел



	1	2	3	4	5	9	10	12	23	60	100	1000	10000
Греческий язык	α'	β'	γ'	δ'	ε'	θ'	ι'	ιβ'	κγ'	ξ'	ρ'	,α	,ι

Древние числительные

Схематичное изображение английской счетной палочки бы значение, если бы единственной целью нумерации была компактная запись чисел. Но это не главное. Гораздо более важно, насколько система приспособлена к арифметическим операциям и насколько легко выполнять вычисления.

И с этой точки зрения едва ли можно выбрать какую-либо из систем — ни один из подходов не позволяет создать арифметику, которую смог бы использовать человек средних способностей. Вот почему с начала истории и до появления современной *позиционной* записи чисел так мало продвинулось вперед искусство вычислений.

Нельзя сказать, что не было попыток создать правила для работы с этими числами. Но о том, насколько сложными были такие правила, можно судить по тому благоговению, которое внушали все вычисления в те времена. Считалось, что люди, искусные в счете, наделены почти нечеловеческой силой. Этим можно объяснить, почему с незапамятных времен служители культа усердно изучали арифметику. В дальнейшем у нас еще будет возможность подробно остановиться на отношении зарождающейся математики к религиозным обрядам и тайнам. Это относится не только к Древнему Востоку, где наука формировалась вокруг религии; даже образованные греки так и не смогли освободиться полностью от мистицизма чисел и форм.

И до некоторой степени такое благоговение сохранилось до наших дней. Средний человек отождествляет математические способности с умением работать с цифрами. «А, вы математик? Значит, у вас нет проблем с декларацией о подоходных налогах!» Какому математику не говорили так хотя бы раз в жизни? В этом высказывании есть непреднамеренная ирония, поскольку большинство профессиональных математиков не сталкивается с проблемой чрезмерных доходов.

Вот история о германском купце, который жил в пятнадцатом веке. Я не стану утверждать, что она достоверна, но эта история настолько ярко характеризует существовавшую тогда ситуацию, что я просто не могу удержаться, чтобы не рассказать ее. У купца был сын, которому он хотел дать наилучшее образование для занятий торговлей. За советом, куда послать сына учиться, купец обратился к известному профессору университета. Тот ответил, что если учебный курс молодого человека ограничится только сложением и вычитанием, то он может пройти обучение в германском университете; но умножение и деление, продолжил профессор, очень развито в Италии, которая, по мнению профессора, является единственной страной, где можно получить такое продвинутое образование.

На самом деле, умножение и деление, применявшиеся на практике в те времена, имели мало общего с современными операциями. Умножение, например, осуществлялось последовательными удвоениями числа. Точно так же деление сводилось к делению пополам. Более ясно это видно из примера, демонстрирующего искусство вычислений в средние века. Используя современные обозначения:

Сегодня	**Тринадцатый век**
46	$46 \times 2 = 92$
13	$46 \times 4 = 92 \times 2 = 184$
138	$46 \times 8 = 184 \times 2 = 368$
46	$368 + 184 + 46 = 598$
598	

Мы начинаем понимать, почему человечество так упорно цеплялось за такие устройства, как абак или даже счетная палочка. Вычисления, которые в наши дни может выполнить ребенок, тогда требовали услуг специалиста, и то, на что сегодня уходит несколько минут, в двенадцатом веке подразумевало несколько дней усердной и аккуратной работы.

Чрезвычайную легкость, с которой сегодня обычный человек манипулирует с числами, часто принимают за доказательство роста человеческого интеллекта. На самом же деле, трудности, с которыми сталкивались люди прошлых веков, являлись прямым следствием используемой тогда нумерации; нумерации, не поддающейся описанию четкими простыми правилами. Открытие современной позиционной системы счисления уничтожило эти препятствия и сделало арифметику доступной всем.

Возрастающая сложность жизни, промышленность и торговля, земельная собственность и владение рабами, налогообложение и военные структуры – везде требовались более или менее замысловатые расчеты, к тому же выходящие за пределы того, что можно сосчитать на пальцах. Жесткая и громоздкая система исчисления не могла удовлетворить эти требования. Как же людям в течение пяти тысячелетий цивилизованного существования, предшествовавших появлению современной нумерации, удавалось преодолевать все трудности?

Ответ заключается в том, что с самого начала приходилось прибегать к механическим устройствам, форма которых менялась в зависимости от места и времени, но принцип действия оставался одним и тем же. В качестве типичного примера можно рассматривать необычный способ подсчета войск, обнаруженный на Мадагаскаре. Солдаты по очереди движутся через узкий проход, и каждый из них кладет камень. Когда количество камней достигает 10, один камень бросают в кучу, обозначающую десятки, и счет продолжается. Когда 10 камней скапливается во второй куче, камень кладут в третью кучу, представляющую сотни, и так до тех пор, пока все солдаты не будут сосчитаны.

Осталось сделать один шаг, и мы получим *счетную доску*, или *абак*, который в том или ином виде был найден практически в каждой стране, где существовала техника счета. В самом общем виде абак представляет собой плоскую доску, разделенную на последовательность параллельных полос, каждая из которых представляет отдельный десятичный разряд: такой как единицы, десятки, сотни и т.д. К доске прилагались камешки или другие предметы, использовавшиеся для обозначения количества единиц в каждом разряде. Например, чтобы представить на абаке число 574, нужно отложить четыре камешка в последней полосе, семь — в предпоследней и пять — в третьей от последней (см. рис. на с. 30).

Известно множество счетных досок, различающихся только конструкцией полосок и видом используемых для счета предметов. В греческих и римских счетах применялись свободно лежащие камешки, а в китайских абаках просверленные шарики скользили по тонким бамбуковым стержням. Русские счеты, как и китайские, состоят из деревянной рамы; в ней закреплены металлические стержни, по которым перемещаются костяшки. Наконец, древнеиндийская *пыльная доска*, скорее всего, в принципе была также разновидностью абака, только роль камешков играли стираемые знаки, написанные на песке.

Происхождение самого слова абак не совсем ясно. Некоторые возводят это слово к семитскому *abac* — «пыль»; другие полагают, что это слово произошло от греческого *abax* — доска. Этот инструмент широко использовался в Греции, свидетельства чего мы находим у Геродота и Полибия. Последний, описывая в своей «Истории» двор царя Македонии Филиппа II, делает такое заставляющее задуматься заявление:

> «Люди эти походят на камешки счетной доски, как сии последние по воле счетчика получают значение то медной монеты, то вслед засим таланта, так и придворные по мановению царя становятся то счастливцами, то минуту спустя жалкими созданиями».
>
> *(Перевод Ф.Г. Мищенко)*

До нашего времени такими счетами изо дня в день пользуются в деревенских районах России, а также в Китае, где в открытой борьбе они не уступают современным вычислительным устройствам. Но в Западной Европе и в Америке такие устройства сохранились просто как диковинки, а большинство людей видит их только на картинках. Немногие представляют себе, насколько широко использовались счеты в их собственной стране всего лишь несколько столетий назад и как это позволяло до известной степени справляться с трудностями, обусловленными неуклюжей системой счисления.

Каждый, кто начнет размышлять над историей развития вычислений до появления позиционной системы счисления, будет удивлен незначительностью достижений. В течение долгих пяти тысячелетий многие цивилизации переживали подъем и приходили в упадок, оставляя после себя огромное наследие в области литературы, искусства, философии и религии. А каких успехов достигло искусство вычислений, самое древнее искусство, применявшееся человеком на практике? Неповоротливая система счисления, настолько грубая, что прогресс был почти невозможен; и вычислительные устройства, настолько ограниченные, что даже элементарные вычисления требовали усилий искусных специалистов. И более того, люди использовали эти устройства на протяжении тысячелетий, не внося ни одного сколько-нибудь стоящего улучшения в инструмент, ни одной существенной новой идеи в систему!

Эта критика может показаться чрезмерно суровой; не совсем справедливо судить о достижениях прошлых веков по стандартам нашего собственного времени с его ускоряющимся прогрессом и лихорадочной активностью. Однако даже по сравнению с медленными темпами развития мысли в средние века ранняя история вычислений представляет собой безрадостную картину чрезвычайной заторможенности.

На фоне этого достижение неизвестного индуса, в первые века нашей эры открывшего *принцип позиционной записи*, представляется событием мирового масштаба. Этот принцип не только внес радикальные изменения в систему записи чисел, но, как мы теперь знаем, без него был бы невозможен прогресс в арифметике. А между тем принцип настолько прост, что сегодня его без проблем усваивает любой школьник. В значительной степени сама структура языка чисел наводит на мысль об этом принципе. В самом деле, казалось бы, первая же попытка перевести механизм вычислений на счетной доске на язык чисел должна была привести к открытию принципа позиционной записи.

Особенно странным нам кажется тот факт, что великие греческие математики не натолкнулись на эту идею. Может быть, дело в том, что греки испытывали настолько сильное презрение к прикладным наукам, что оставляли даже обучение своих детей рабам? Но если так, то почему нация, которая дала миру геометрию и так далеко продвинулась в этой науке, не создала даже зачатков алгебры? Разве менее странно, что алгебра — фундамент современной математики — возникла также в Индии, причем примерно в то же время, что и система позиционной записи чисел?

Тщательный анализ современной нумерации может пролить свет на эти вопросы. *Принцип позиционности* заключается в том, что цифре присваивается значение, зависящее не только от члена натурального ряда, который она представляет, но также от положения, которое она занимает по отношению к другим символам в группе. Таким образом, одна и та же цифра 2 имеет различное значение в числах 342, 725 и 269: в первом случае она обозначает два, во втором — двадцать, в третьем — двести. Фактически, 342 — это сокращенная запись выражения: три сотни плюс четыре десятка плюс две единицы.

Но это в точности то же самое, что и представление на счетной доске, где 342 записывается так:

И, как я уже говорил, кажется, что достаточно перевести эту схему на язык чисел, чтобы получить именно то, что мы имеем сегодня.

Да! Но есть одна сложность. При любой попытке сделать долговременную запись операций, выполняемых на счетной доске, мы столкнемся с определенным препятствием. Такая запись, как ≡ = может означать любое из нескольких чисел: 32, 302, 320, 3002 и 3020 и т.п. Чтобы устранить эту неопределенность, нужен какой-то метод заполнения пропусков, т.е. нам необходим *символ для обозначения пустой полосы.*

Итак, мы видим, что никакое развитие невозможно, пока не придуман знак для *пустого* разряда, символ *отсутствия величины*, наш современный *ноль.* Конкретное мышление древних греков не позволяло им представить пустое место в виде числа, наделить пустое место символом.

И точно так же неизвестный индус не видел в нуле символа пустого места. По-индийски ноль обозначался словом *sunya*, что означало *незаполненность* или *чистоту*, но не «отсутствие» или «ничего». Таким образом, по всей очевидности, открытие нуля было случайностью, связанной с попыткой недвусмысленно записать надолго операции, выполняемые на счетной доске.

То, как индийский символ *sunya* стал нулем в современном его понимании, составляет одну из интереснейших глав в истории культуры. Когда в десятом веке арабы переняли индийский способ записи чисел, они перевели индийское *sunya* на арабский как *sifr*, что означает незаполненность по-арабски. Когда индоарабская система записи появилась в Италии, слово *sifr* приобрело латинскую форму *zephirum*. Это случилось в начале тринадцатого века, и в течение следующих ста лет слово претерпело ряд изменений, завершившихся появлением итальянского *zero*.

Примерно в то же самое время Жордан Неморариус вводил арабскую систему записи чисел в Германии. Он сохранил арабское слово, слегка изменив его, так что оно стало звучать как *cifra*. О том, что в течение некоторого времени в просвещенных кругах Европы слово *cifra* и его производные означало ноль, свидетельствует тот факт, что великий Гаусс, последний из математиков девятнадцатого века, кто писал на латыни, использовал слово *cifra* именно в этом смысле. В английском языке слово *cifra* трансформировалось в *cipher* и сохранило свое первоначальное значение «ноль».

Об отношении простых людей к этой новой системе записи чисел можно судить по тому факту, что вскоре после введения ее в Европе слово *cifra* стало означать «секретный знак»; но этот смысл в последующие столетия был полностью утрачен. Глагол *decipher* (расшифровывать) остался как напоминание о давних временах.

На следующем этапе развития, искусство вычислений получило намного более широкое распространение. Нужно отметить, что значимость роли, которую играл ноль в этой новой системе, не ускользнула от внимания людей. В самом деле, они отождествили всю систему с самой яркой ее чертой – *cifra*; и это объясняет, как различные формы слова *ziffer*, *chiffre* и т.д. приобрели значение *цифра,* которое они имеют в европейских языках в наши дни.

Двойное значение слова – общераспространенное *cifra* означало «цифра», а для ученых слово *cifra* символизировало «ноль» – стало причиной многих недоразумений. И напрасно ученые пытались вернуть первоначальное значение слова: общераспространенное значение пустило глубокие корни. Ученым пришлось примириться с общим словоупотреблением, и, в конце концов, дело закончилось тем, что итальянское слово *zero* (ноль) было принято и стало использоваться в том же смысле, что и в наши дни.

Интересно также рассмотреть историю слова *algorithm*. Сегодня мы используем его для обозначения математической процедуры, состоящей из некоторого количества шагов, причем на каждом последующем шаге используется результат, полученный на предыдущем. Однако в период с десятого века по пятнадцатый слово *algorithm* означало позиционную запись чисел. Теперь мы знаем, что это слово — просто искаженное имя великого арабского математика аль-Хорезми, жившего в девятом веке. Его книга (в переводе на латынь) была первой книгой по данному вопросу, попавшей в Западную Европу.

Сегодня, когда позиционная система записи чисел стала частью нашей повседневной жизни, кажется, что превосходство этого метода, компактность записи, легкость и простота, вносимые им в вычисления должны были гарантировать его быстрое принятие и широкое распространение. Но на самом деле переход к новой системе не только не произошел мгновенно — он затянулся на несколько столетий. Борьба между теми, кто защищал старые традиции, и сторонниками реформы продолжалась с одиннадцатого по пятнадцатый век и прошла через все обычные стадии торжества мракобесия и реакции. Кое-где арабские цифры запрещалось использовать в официальных документах; в других местах новая система была запрещена вообще. И, как всегда, *запрет* не привел к отказу от новой системы, но стал причиной ее *нелегального распространения*; многочисленные доказательства этому можно найти в архивах тринадцатого века в Италии, где, оказывается, купцы использовали арабские цифры как разновидность секретного кода.

Однако на некоторое время реакция достигла успеха в замедлении прогресса и сумела воспрепятствовать развитию новой системы. Действительно, в эти переходные столетия в искусство счета не было внесено почти ничего такого, что имело бы существенное значение и могло бы оказать длительное влияние в будущем. Только внешний вид цифр претерпел ряд заметных изменений; но не потому, что их хотели как-то улучшить, а просто из-за того, что цифры были рукописными. Фактически, постоянную форму цифры приобрели только после появления печатного станка. И следует добавить, что стабилизирующее влияние печати было столь велико, что современные цифры имеют практически тот же вид, что и в пятнадцатом столетии.

Нельзя установить точную дату, когда сторонники новой системы записи одержали верх. Мы знаем только, что к началу шестнадцатого века превосходство нового метода стало неоспоримым. С этого момента прогрессу ничто не препятствовало, и в течение последующих ста лет все правила работы, как с целыми числами, так и с обыкновенными и десятичными дробями, приобрели практически тот же вид, в котором их в наши дни преподают в школе.

Еще сто лет, и приверженцы старого метода и все, что они отстаивали, было столь основательно забыто, что различные народы Европы начали рассматривать позиционную систему записи чисел как свое собственное национальное достижение. Так, например, в начале девятнадцатого века в Германии арабские цифры назывались *немецкими* (*Deutsche*) в отличие от *римских*, иностранное происхождение которых признавалось.

Что же касается самого абака, то его следы в Европе в восемнадцатом веке практически отсутствуют. Он появляется вновь в начале девятнадцатого века при весьма забавных обстоятельствах. Математик Понселе, генерал наполеоновской армии, был взят плен, участвуя в Русской кампании, и провел в России много лет как военнопленный. Вернувшись во Францию, он среди прочих диковинок привез и русские счеты. В течение многих последующих лет предмет, привезенный Понселе, считался удивительной диковиной «варварского» происхождения. Таких примеров национальной амнезии в истории культуры можно найти сколько угодно. Много ли образованных людей даже сегодня знает, что всего лишь четыреста лет назад счет на пальцах для среднего человека был единственным способом вычислений, а абак был доступен только профессиональным расчетчикам того времени?

По всей вероятности, именно появление индийского символа *sunya*, обозначающего пустую полосу на счетной доске, предопределило поворот в развитии, благодаря которому стал возможен немыслимый прогресс наук, промышленности и торговли. И влияние этого великого открытия не ограничивается только арифметикой. Оно сыграло фундаментальную роль практически во всех областях математики, проложив путь обобщенному понятию числа. В истории культуры открытие нуля всегда будет примером одного из самых замечательных достижений человечества.

Великое открытие! Да. Но, как и многие другие открытия, в значительной степени повлиявшие на жизнь всего человечества, оно явилось не результатом скрупулезных исследований, а даром слепого случая.

ГЛАВА 3

ЗНАНИЯ О ЧИСЛАХ

> Прекрасное, определенное и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределенным, неограниченным и безобразным.
>
> *Никомах*

Нет двух других разделов математики, являющих собой больший контраст, чем арифметика и *теория чисел.*

Общность и простота ее правил делают арифметику доступной практически любому человеку. Фактически, способность к вычислениям — это просто вопрос памяти, и те, кто считает молниеносно, по сути, действуют так же, как механические вычислители.

С другой стороны, теория чисел общепризнанно считается наиболее сложной из всех математических дисциплин. Правда, формулировки проблем в ней настолько просты, что понять, в чем суть, может даже ребенок. Но используемые методы настолько оригинальны, что необходимы необыкновенная изобретательность и выдающееся мастерство, чтобы выбрать соответствующий подход. Интуиция здесь получает полную свободу. Большинство известных свойств было открыто благодаря своего рода *индукции.* Некоторые утверждения, которые многие века считались истинными, были впоследствии опровергнуты, и до наших дней существуют задачи, бросающие вызов способностям самых выдающихся математиков и все же остающиеся нерешенными.

Арифметика является основой всей математики, как чистой, так и прикладной. Это самая полезная из всех наук, и, возможно, нет другой отрасли человеческих знаний, которая была бы столь же широко распространена среди людей.

С другой стороны, теория чисел — это раздел математики, имеющий наименьшее количество приложений. Она не только не оказывает никакого влияния на технический прогресс, но даже в области чистой математики эта теория всегда занимала изолированное положение, слабо связанное с основным предметом изучения этой науки.

Люди, склонные к утилитарной интерпретации истории культуры, могли бы попытаться сделать вывод, что арифметика появилась раньше теории чисел. Но верно как раз обратное. Теория целых чисел является одной из самых старых разделов математики, в то время как современной арифметике всего лишь несколько сот лет.

Это отражено и в истории слов. Греческое слово *arithmos* означало число, и *арифметикой* вплоть до семнадцатого века называлась именно теория чисел. То, что мы сегодня называем арифметикой, у греков называлось словом *логистика*, а в средние века, как мы уже видели, словом *алгоритм* (т.е. арабская система счисления).

Хотя захватывающая история, которую я собираюсь рассказать, не имеет непосредственного отношения к истории развития других математических концепций, она лучше всего подходит, чтобы проиллюстрировать эволюцию этих концепций.

Отдельные признаки целых чисел с древности являлись объектом размышлений для человечества, в то время как более важные, присущие числам свойства принимались без доказательств. Чем можно объяснить эту странность?

Жизнь человека, в соответствии со знаменитым изречением Монтескье, это просто череда ложных надежд и нелепых страхов. Эти надежды и страхи, которые до сегодняшних дней находят свое выражение в неопределенном и смутном религиозном мистицизме, в те далекие времена принимали гораздо более конкретные и осязаемые формы. Звезды и камни, звери и травы, слова и числа предсказывали и влияли на судьбу человека.

Происхождение всех наук восходит к размышлениям об этих таинственных влияниях. Астрология предшествовала астрономии, химия выросла из алхимии, а предшественницей теории чисел была нумерология, которая и в наши дни продолжает существовать в необъяснимых иначе знамениях и суевериях.

«Семь дней семь священников с семью трубами обходили Иерихон, и на седьмой день они обошли город семь раз».

Сорок дней и сорок ночей длился дождь, который привел к всемирному потопу. Сорок дней и сорок ночей Моисей общался с Иеговой на горе Синай. Сорок лет дети Израиля странствовали по пустыне.

Шесть, семь и сорок были мистическими числами у иудеев; и христианская теология унаследовала число семь: семь смертных грехов, семь добродетелей, семь духов Божьих, семь радостей Девы Марии, семь дьяволов, изгнанных из Магдалины.

Вавилоняне и персы предпочитали число 60 и его кратные. Ксеркс наказал пролив Геллеспонт 300 ударами кнута, и Дарий приказал выкопать 360 канав, чтобы разделить реку Гиндес на протоки, потому что в ней утонул один из его священных коней. (По другим источникам это сделал Кир во время похода на Вавилон. – *Прим. пер.*)

«Религиозные ценности, – говорил Пуанкаре, – изменяются с долготой и широтой». Хотя числа 3, 7, 10, 13, 40 и 60 пользовались особой популярностью, но практически любому другому числу в то или иное время, в том или ином месте приписывали оккультную значимость. Например, вавилоняне связывали каждого из своих богов с числом от 1 до 60, которое указывало на положение этого бога в небесной иерархии.

Культ чисел, исповедуемый пифагорейцами, поразительно похож на вавилонский. Кажется, они боялись оскорбить числа невниманием, и приписывали мистическую важность практически всем числам от 1 до 50.

Одной из самых абсурдных, но широко распространенных форм нумерологии является так называемая *Гематрия.* Каждая буква греческого и иудейского алфавита имела двойное значение: и звука, и числа. Сумма чисел, представляющих буквы, входившие в слово, называлась *числом этого слова,* и с точки зрения Гематрии два слова считались эквивалентными, если при сложении получалось одно и то же число. (Толстой в романе «Война и мир» описывает подсчеты, в результате которых получается, что число, соответствующее имени Наполеона Бонапарта, написанному по-французски, равно 666 – числу Зверя. – *Прим. пер.*) С давних лет Гематрия использовалась не только для трактовки библейских сюжетов; есть сведения, указывающие на то, что сочинители Библии также знали об этом искусстве и применяли его на практике. Например, Авраам, отправляясь спасать своего брата Елиазара, взял с собой 318 рабов. Является ли совпадением то, что иудейскому слову Елиазар соответствует число 318? (Авраам вооружил 318 рабов, чтобы спасти своего племянника Лота. Елиазар был его старшим рабом. – *Прим. пер.*)

Множество примеров использования Гематрии можно обнаружить в греческой мифологии. Именам таких героев, как Патрокл, Гектор и Ахиллес, соответствуют числа 87, 1225 и 1276. Этим объясняется превосходство Ахиллеса. Поэт, желая проклясть свое домашнее животное по имени *Thamagoras*, доказал, что это слово эквивалентно слову *loimos*, означавшему чуму.

Христианские богословы часто использовали Гематрию, чтобы трактовать прошлое и предсказывать будущее. Особенно важным считалось число 666 – число Зверя Апокалипсиса. В католической интерпретации Зверем является Антихрист. Один из теологов, Пьетро Бонго, живший во времена Мартина Лютера, написал книгу по нумерологии, состоящую почти из 700 страниц. Большая часть этой работы была посвящена мистическому числу 666, которое, по мнению автора, было эквивалентно имени Лютера. Он считал это неоспоримым доказательством того, что Лютер является Антихристом. Лютер ответил, что число 666 можно интерпретировать как предсказание, касающееся продолжительности власти Папы Римского, и возликовал по поводу того, что этой власти скоро придет конец.

Гематрия входит сегодня в школьную программу обучения набожных евреев. То, насколько хорошо они овладевают этим методом двойственной интерпретации содержания Библии, можно проиллюстрировать следующим почти невероятным примером. Талмудисту предлагают назвать ряд чисел, в последовательности, не подчиняющейся определенной закономерности. Длина последовательности может превышать 500. Он называет их в течение примерно 10 минут, а его собеседник записывает все числа. Затем талмудист предлагает повторить все те же самые числа без единой ошибки и в той же самой последовательности. Он что же, запомнил весь ряд чисел? Нет, он просто берет какой-нибудь отрывок из Священного Писания и переводит его на язык Гематрии.

Но вернемся к культу чисел. Свое высшее выражение он нашел в философии пифагорейцев. Четные числа они считали разложимыми, следовательно, эфемерными, женственными, относящимися к земле; нечетные числа были неразложимыми, мужскими, поэтому они имели небесную природу.

Каждое число отождествлялось с чем-либо присущим человеку. *Единица* обозначала разум, поскольку он неизменен, *двойка* – мнение, *четверка* – справедливость, так как это первый полный квадрат, произведение равных чисел, *пятерка* – супружество, поскольку это союз первого женского и первого мужского чисел. (Единица рассматривалась не как нечетное число, а скорее как *источник* всех чисел.)

Странно, но удивительно похожее соответствие мы обнаруживаем в китайской мифологии. Здесь нечетные числа означают белый цвет, день, тепло, солнце, огонь; а четные числа, напротив –

черный цвет, ночь, холод, вещество, воду, землю. Числа располагались на священной доске Ло-Чоу, которая при правильном использовании демонстрировала магические свойства.

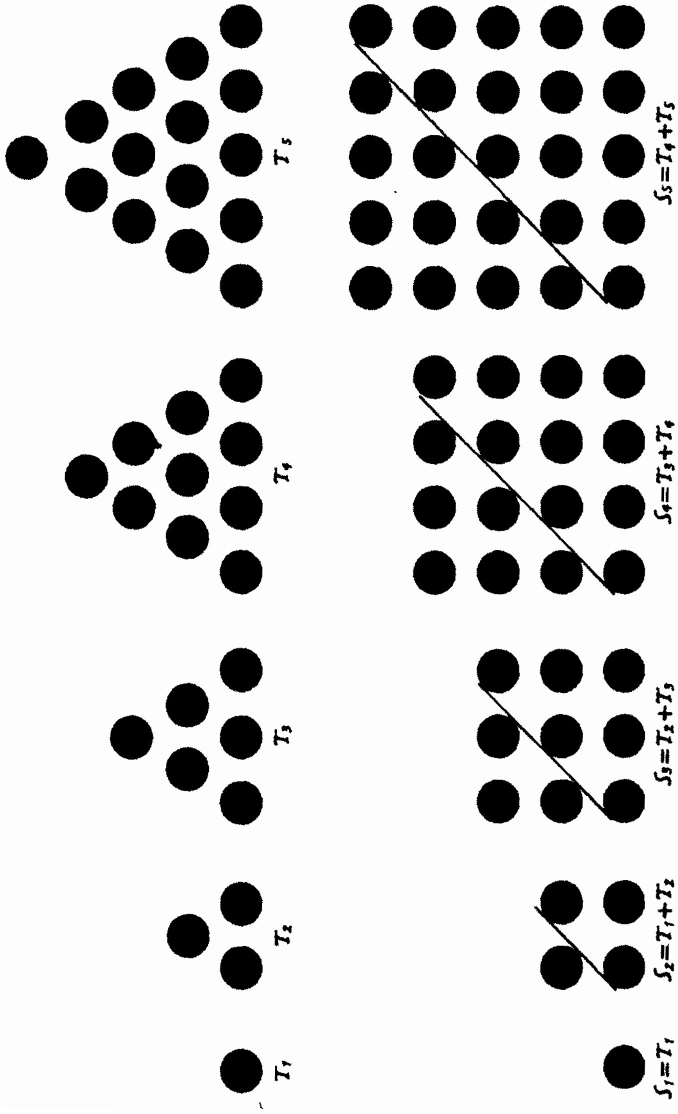
«Благословите нас, божественные числа, созданные богами и людьми. О святой, святой *тетраксис*, ты содержишь корень и являешься источником вечно продолжающегося творения! Ибо божественное число начинается с абсолютной, чистой единицы и приходит к священной четверке и затем рождает мать всего, всепримиряющую, всесвязующую, перворожденную, никогда не сбивающуюся с пути, неустанную священную десятку, ключ всего».

Это молитва пифагорейцев обращена к тетраксису, священной четверке, которая считалась символом четырех элементов: огня, воды, воздуха и земли. Священная десятка получается сочетанием первых четырех чисел: 1, 2, 3, 4. Существует необычная и изящная притча о том, как Пифагор приказал новому ученику сосчитать до четырех:

«Пойми, то, что ты считаешь четверкой, на самом деле десять, и полный треугольник, и наш пароль».

Упоминание полного треугольника существенно: оно указывает на то, что в Древней Греции числа записывали точками. На приведенном рисунке показаны треугольные числа: 1, 3, 6, 10, 15; а также квадратные числа: 1, 4, 9, 16, 25. Поскольку с этого фактически началось развитие теории чисел, такая вера в геометрическую интуицию представляет большой интерес. Пифагорейцы знали, что квадрат любого числа равен треугольному числу этого же числа, сложенному с предыдущим треугольным числом. Они доказали это, разделяя точки и считая их, как показано на рисунке. Интересно сравнить этот метод с тем, которым воспользовался бы в наши дни сообразительный школьник. Треугольное число, соответствующее числу n, очевидно, равно $1 + 2 + 3 + \ldots + n$; сумма этой арифметической прогрессии равна $1/2n(n + 1)$. Предыдущее треугольное число по той же причине равно $1/2(n - 1)\, n$. Простые вычисления показывают, что сумма этих двух чисел дает n^2, т.е. квадрат числа n (см. рис. на с. 47).

Сегодня ничего не напоминает нам о своем геометрическом происхождении, разве что слова *квадрат* и *куб*. Треугольные и в более общем случае многоугольные числа сегодня не представляют большого интереса для науки. Однако даже во времена Никомаха (I в. н.э.) они были важным объектом арифметических исследований.



Треугольные и квадратные числа

В чем источник мистической философии пифагорейцев, которая наложила столь глубокий отпечаток на размышления всех греческих мыслителей, включая Платона и Аристотеля, до сих пор остается спорным вопросом. Современному разуму, пропитанному рационализмом, весь этот помпезный культ числа может показаться *суеверием, возведенным в систему.* Но если мы посмотрим в исторической перспективе, то займем более благожелательную позицию. Если отбросить религиозный мистицизм, мы увидим, что в философии пифагорейцев содержалась фундаментальная мысль, что только через число и форму человек может осознать природу мироздания. Такие же идеи высказывали Филолай, самый способный ученик Пифагора, и Никомах, которого можно считать нео-пифагорейцем.

«Все, что познается, имеет число, ибо невозможно ни понять ничего, ни познать без него». (*Филолай*)

«Все, что по природе было искусно расположено в космосе, обнаруживается разделенным и упорядоченным в частях и в целом в соответствии с Числом, по промыслу и уму создателя этого целого; и оно упрочено по предначертанному образцовому плану в соответствии с Числом, изначально имевшемся в разуме создавшего космос Бога. Это число лишь мыслится, и оно во всех отношениях нематериально, но все же оно является действительным и вечно сущим». (*Никомах*)

Когда Пифагора спросили, кто такой друг, он ответил: «Тот, кто есть другой я, вот как числа 220 и 284». Если использовать современную терминологию, то это означало следующее: делителями числа 284 являются 1, 2, 4, 71 и 142 и их сумма равна 220; в то время как делители числа 220 — это 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110 и их сумма, в свою очередь, равна 284. Такие числа пифагорейцы называли *дружественными.*

Открытие таких пар чисел было для греков чрезвычайно интересной проблемой, представляющей значительную сложность. В общем виде вопрос о том, существует ли бесконечное количество таких пар, не решен до сих пор, хотя их известно около сотни.

Дружественные числа были известны индусам еще задолго до Пифагора. По-видимому, также некоторые отрывки из Библии указывают на то, что иудеи считали такие числа хорошим знаком.

Есть недостоверная средневековая легенда о принце, чье имя с точки зрения Гематрии соответствовало числу 284. Он искал невесту, чье имя представлялось бы как 220, так как верил, что тогда Небеса обеспечат счастливый брак.

Есть также *совершенные* числа. Рассмотрим сначала такое число, как 14; сумма его делителей 1, 2 и 7 составляет 10. Таким образом, число 14 больше суммы своих делителей, и поэтому оно называется *избыточным.* С другой стороны, сумма делителей числа 12 равна 16, что больше, чем 12, и по этой причине это число называется *недостаточным.* А *совершенные* числа не являются ни избыточными, ни недостаточными; они равны сумме своих делителей.

Два наименьших совершенных числа – 6 и 28 – в древности были известны индусам, так же как и евреям. Некоторые комментаторы Библии рассматривают числа 6 и 28 как фундаментальные числа Творца. Они указывают на 6 дней, в течение которых был сотворен мир, и на 28 дней лунного цикла. Другие заходят так далеко, что объясняют несовершенство второго творения тем, что в Ноевом ковчеге было восемь душ, а не шесть.

Святой Августин сказал:

«Число шесть совершенно само по себе, а не потому, что Господь сотворил все сущее за шесть дней; скорее наоборот, Бог сотворил все сущее за шесть дней, потому что это число совершенно. И оно оставалось бы совершенным, даже если бы не было сотворения за шесть дней».

Следующие два совершенных числа, по-видимому, были открыты Никомахом. Вот отрывок из его «Арифметики»:

«Прекрасные и благородные вещи обычно редки и легко пересчитываемы, тогда как безобразные и плохие — многочисленны; вот и избыточные и недостаточные числа отыскиваются в большом количестве и беспорядочно, так что способ их нахождения неупорядочен, в то время как совершенные числа легко перечислимы и расположены в надлежащем порядке. Ведь среди однозначных чисел находится одно такое число 6, второе число 28 — единственное среди десятков, третье число 496 — единственное среди сотен, а четвертое число 8128 — среди тысяч, если ограничиться десятью тысячами. И присущее им свойство состоит в том, что они попеременно оканчиваются то на шестерку, то на восьмерку и все являются четными».

Если Никомах полагал, что в каждом десятичном порядке есть по одному совершенному числу, то он ошибался, так как пятое совершенное число равно 33 550 336. Но в остальных отношениях его догадка замечательно верна. Хотя доказать, что нечетное число не может быть совершенным, не удалось, ни одного примера таких чисел неизвестно. Более того, все четные совершенные числа действительно заканчиваются на 6 или на 8.

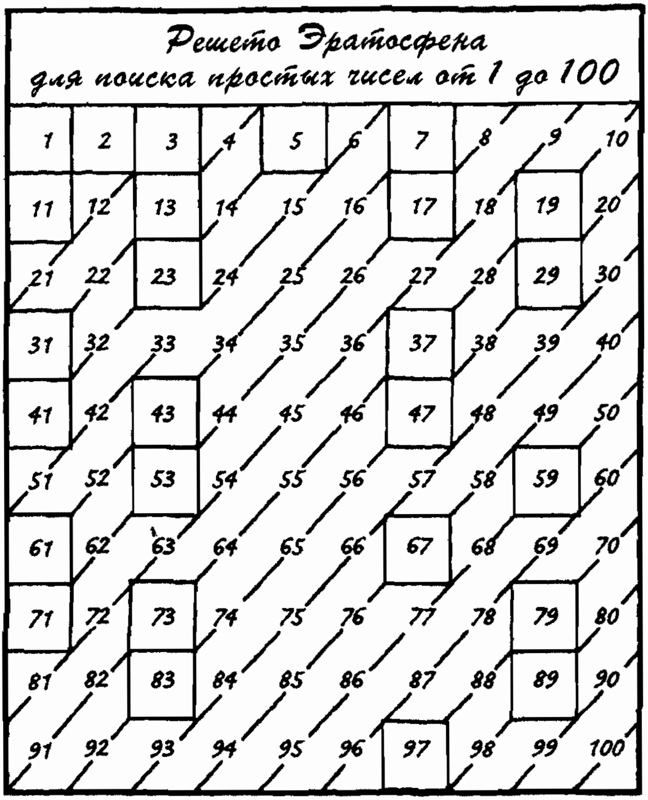
С каким уважением греки относились к совершенным числам, демонстрирует тот факт, что Евклид посвятил им главу в своих *Элементах*. Там он доказал, что любое число вида $2^{p-1}(2^p - 1)$ является совершенным, если нечетный множитель $(2^p - 1)$ является простым. До недавнего времени было известно только двенадцать чисел, точно удовлетворяющих этим условиям. Значения показателя степени p для этих совершенных чисел равны

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 61, 107, 127, 257.$$

С появлением новых быстродействующих вычислительных машин к этому списку добавилось еще пять таких чисел.

Простыми числами люди интересовались с давних времен. Среди различных методов, использовавшихся для их поиска, наиболее интересный называется *Решетом*. Его создание приписывают Эратосфену, современнику Архимеда. Решето Эратосфена для первых 100 чисел показано на рис. на с. 51. Алгоритм заключается в том, чтобы выписать подряд все числа натурального ряда, а затем вычеркнуть сначала все кратные 2, потом из оставшихся – все кратные 3, затем кратные 5 и т.д. Если мы хотим найти все простые числа, меньшие, например, 1000, то необходимо дойти до делителя 31, так как $31^2 = 961$ – самый большой квадрат простого числа, меньший 1000. В несколько модифицированном виде этот метод используется и в наши дни для построения таблиц простых чисел. В современных таблицах приведены простые числа вплоть до 10 000 000.

Хотя этот метод исключения и остроумный, он является полностью индуктивным, и, следовательно, с его помощью невозможно исследовать общие свойства простых чисел. Например, первый вопрос, который естественно возникает: конечно или бесконечно множество простых чисел? Другими словами, бесконечно ли количество простых чисел или существует самое большое простое число? Евклид предложил решение этой фундаментальной проблемы, которое вписано в анналы математики как образец совершенства.



В этом доказательстве Евклид впервые в истории ввел понятие, которое сегодня мы называем *факториалом*. Произведения первых *n* последовательных целых чисел играют очень важную роль в математике. Такие произведения обозначаются как *n*!. Например, факториал семи 7! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7. Таблица факториалов от 1 до 11 приведена на с. 54.

Чтобы доказать, что наибольшего простого числа не существует, Евклид показал, что если *n* – любое простое число, то или число (*n*! + 1) также будет простым, или между *n* и (*n*! + 1) существуют другие простые числа. Возможны оба случая; если *n* = 3, то соответствующее число Евклида 7 – простое число; а если *n* = 7, то *n*! = 5040, и соответствующее число Евклида 5041 – составное число, фактически квадрат простого числа 71 × 71. Между 7 и (7! +1) следовательно, есть простое число 71.

Чтобы доказать это утверждение в общем случае, Евклид рассуждал следующим образом: у двух последовательных чисел не может быть общих делителей; это относится, в частности, к числам $n!$ и $n! + 1$. Если же у второго числа вообще есть какие-либо простые делители, то они должны отличаться от n или любого числа, предшествующего n. В таком случае или у числа Евклида $n! + 1$ есть простой делитель, больший, чем n, или число Евклида само простое — в любом случае существуют простые числа, большие n.

Отсюда Евклид сделал вывод, что не существует самого большого простого числа или, иначе говоря, количество простых чисел бесконечно.

Следующий вопрос касается распределения простых чисел. Мы можем говорить, например, о *плотности* простых чисел, т.е. о количестве простых чисел, например, в любой тысяче чисел. Это, конечно, то же самое, что пересчитать все простые числа, меньшие заданного числа. Решая эту задачу, многие современные математики продемонстрировали чудеса изобретательности, но вполне удовлетворительное решение все еще не получено. Однако мы знаем уже достаточно много, чтобы заключить, что простые числа не располагаются намного реже по мере увеличения абсолютных значений.

В 1845 году французский математик Бертран предположил, что для любого x между x и $2x$ существует хотя бы одно простое число. Он основывал это утверждение на эмпирическом изучении таблицы простых чисел. В течение пятидесяти лет это предположение было известно как *постулат Бертрана*. В конечном счете его доказал великий русский математик Чебышев, который показал также, что простые числа присутствуют даже в намного более узком диапазоне. Затем в 1911 году решение этой проблемы существенно продвинулось, благодаря итальянскому математику Боноли. Он вывел приближенную формулу для количества простых чисел между x и $3/2x$. Согласно этой формуле между 100 000 000 и 150 000 000 существует не менее миллиона простых чисел.

С другой стороны, было показано, что так называемые парные простые числа, такие как (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43) и т.д., становятся все реже и реже с ростом абсолютных значений. Эту замечательную теорему доказал голландский математик Брунс в 1919 году.

Как мы узнаем, является ли данное число простым или составным? Мы знаем, что если число оканчивается на 5, или на 0, или на *четную* цифру, то оно составное. Но предположим, что оно оканчивается на 3, 7 или 9. Можно достаточно просто проверить делимость числа на 3 или 9: если сумма всех цифр числа кратна 3 или 9, то и само число также делится на 3 или на 9. Это *правило девятки* известно очень давно.

Правила проверки делимости на другие числа намного более сложные. Правда, Паскаль в 1654 году и через сто лет Лагранж доказали весьма общие теоремы, но эти теоремы отличаются скорее математической элегантностью, чем имеют практическое значение. Профессор Диксон в своей книге «История теории чисел» делает следующее характерное замечание:

> «Чтобы определить, является ли простым данное число из 15 или 20 цифр, никакого времени не хватит на проверку, что бы мы ни использовали из того, что уже знаем».

Неудивительно, что столетиями предпринимались разнообразные попытки найти общую математическую формулу, которая подходила бы для всех простых чисел, или, поскольку это не получалось, найти хотя бы конкретную схему для получения простых чисел. В 1640 году великий французский математик Ферма заявил, что он нашел формулу, которая позволяет представлять только простые числа. Числа, полученные таким образом, теперь называют числами Ферма.

Вот первые четыре числа Ферма:

$$2^2 + 1 = 5 \qquad 2^{2^2} + 1 = 17 \qquad 2^{2^3} + 1 = 257 \qquad 2^{2^4} + 1 = 65537.$$

Ферма проверил, что эти первые числа являются простыми, и некоторое время был уверен в общности своей теоремы. Позднее, однако, он начал сомневаться. Фактически, спустя почти сто лет Эйлер показал, что пятое число Ферма будет уже составным, и один из его множителей равен 641. С тех пор то же самое было установлено относительно шестого, седьмого и еще многих других больших чисел Ферма.

Этот пример показывает опасность *неполной* индукции. Еще более поразительные примеры можно найти среди квадратных трехчленов, таких как

$$f(n) = n^2 - n + 41.$$

При подстановке мы находим, что: $f(1) = 41, f(2) = 43, f(3) = 47, f(4) = 53$... и все эти числа будут простыми, в чем можно убедиться вплоть до $n = 40$. Но для $n = 41$ мы, очевидно, получим составное число: $f(41) = 41 \times 41$.

Неудачи при получении общей формулы для вычисления простых чисел привели к появлению косвенных критериев для проверки на простоту. Ферма полагал, что такой критерий он нашел через свою теорему: *для любого целого n, двучлен $n^p - n$ делится на p, если p — простое число.* Для примера рассмотрим случай $p = 5$. Тогда

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

и легко понять, что один из трех сомножителей должен делиться на пять независимо от значения n.

Справедливость теоремы Ферма была доказана Лейбницем, Эйлером и другими. Есть только одна проблема; хотя утверждение и верно — это не *критерий*, т.е. *условие является необходимым, но не достаточным.* Например, 341 — не простое число, однако $2^{341} - 2$ делится на 341.

Критерий, то есть условие, которое является и необходимым и достаточным, предоставляет так называемая *теорема Вильсона.* Было бы более справедливо называть ее именем Лейбница, который первым доказал, что условие является необходимым. А спустя сто лет Лагранж показал, что условие является также и достаточным. Рассмотрим таблицу, в которой приведены факториалы и числа, превышающие их на единицу, т.е. евклидовы числа вида $n! + 1$.

Критерий Вильсона

Индексом Вильсона называют остаток от деления $(n - 1)! + 1$ на n. Если этот индекс равен 0, то число является простым

n	Тип	Факториал $(n - 1)!$	Число Евклида $(n - 1)! + 1$	Индекс Вильсона
2	Простое	1! = 1	2	0
3	Простое	2! = 2	3	0
4	Составное	3! = 6	7	3
5	Простое	4! = 24	25	0
6	Составное	5! = 121	121	1
7	Простое	6! = 720	721	0
8	Составное	7! = 5,040	5,041	1
9	Составное	8! = 40,320	40,321	1
10	Составное	9! = 362,880	362,881	1
11	Простое	10! = 3,628,800	3,628,801	0
12	Составное	11! = 39,916,800	39,916,801	1

Мы видим, что, когда $n + 1$ равняется 2, 3, 5, 7, 11, т.е. простым числам, $(n + 1)$ является делителем $(n! + 1)$. В то время как для составных значений $n + 1$, таких как 4, 6, 8, 9, 10, при делении $(n! + 1)$ на $(n + 1)$ образуется остаток. Это абсолютно общее свойство: *Для того чтобы число p было простым, необходимо и достаточно, чтобы число, следующее за $(p - 1)!$, содержало p в качестве сомножителя.*

Это замечательное утверждение представляет значительный теоретический интерес. Однако для больших p прямая проверка того, является ли число p делителем числа $(p - 1)! + 1$, так же сложна, как и непосредственная проверка того, является ли p простым числом.

С тех пор было предложено множество косвенных утверждений. Одним из самых интересных является *постулат Гольдбаха*, современника Эйлера. В нем утверждается, что *каждое четное число является суммой двух простых чисел.* Этот постулат был проверен для всех чисел вплоть до 10 000 и даже немного дальше. Но доказательство этого важного утверждения все еще остается проблемой, бросающей вызов изобретательности математиков.

«Между тем совершенно невозможно разложить полный куб на сумму двух кубов, четвертую степень на сумму двух четвертых степеней, вообще какую-либо степень на сумму двух степеней с тем же показателем. Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь слишком мало места, чтобы его поместить».

Этой знаменитой ссылке на полях скоро уже будет триста лет, и многим математикам с тех пор хотелось бы, чтобы поля в распоряжении Ферма были шире, когда он это писал.

История этой задачи возвращает нас к египтянам, которые знали о существовании прямоугольного треугольника с соотношением сторон 3 : 4 : 5. Фактически они использовали такой треугольник для построения прямых углов как что-то наподобие плотничьего угольника. Я слышал, что иногда в Китае до сих пор пользуются таким же методом.

Является ли такой прямоугольный треугольник, стороны которого могут быть выражены целыми числами, единственным? Нет, существует бесконечное количество других таких троек чисел, и пифагорейцам были известны только некоторые из них. Диофант из Александрии, который жил в третьем веке нашей эры, в своей

Числа Пифагора

Если для любых значений u и v число $2uv$ является совершенным прямоугольником, то мы получаем треугольник Пифагора

$$\begin{cases} x = u + \sqrt{2uv} \\ y = v + \sqrt{2uv} \\ z = u + v + \sqrt{2uv} \end{cases}$$

$2uv$	uv	$\sqrt{2uv}$	u	v	x	y	z
4	2	2	1	2	3	4	5
16	8	4	1	8	5	12	13
16	8	4	2	4	6	8	10
36	18	6	1	18	7	24	25
36	18	6	2	9	8	15	17
36	18	6	3	6	9	12	15
64	32	8	1	32	9	40	41
64	32	8	2	16	10	24	26

книге «Арифметика» привел правило нахождения таких чисел. В современной записи эта задача эквивалентна решению уравнения

$$x^n + y^n = z^n$$

в целых числах. Несколько таких чисел Пифагора приведено в таблице, а формула в заголовке таблицы дает нам возможность вычислить «все» пифагоровы тройки. Из этой формулы очевидно, что уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ не только имеет решение в целых числах, но существует бесконечное количество таких решений. Естественно поинтересоваться, справедливо ли это и в отношении аналогичных уравнений более высоких степеней.

Примерно в 1621 году во Франции появилось новое издание «Арифметики» Диофанта, и один экземпляр поступил в собственность Ферма. На полях одной из страниц этой книги Ферма и сделал заметку, которая до сих пор ставит в тупик весь математический мир. Используя современную терминологию, теорему Ферма можно сформулировать следующим образом: *требуется доказать, что уравнение*

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах, если n целое число больше двух.

Как на сегодняшний день обстоят дела с этой задачей? Эйлер доказал невозможность решения для случаев, когда *n* равно 3 и 4, Дирихле – для $n = 5$. Было показано, что если утверждение верно для простых значений показателя степени n, то оно верно также и для составных. Было установлено, что теорема верна для определенных очень многочисленных видов показателей степени и что уравнение Ферма не имеет решений, если n меньше 269. Однако в общем виде теорема пока не доказана, и есть серьезные сомнения, действительно ли Ферма нашел доказательство теоремы в общем виде. (Теорема доказана. См. «Замечания» в конце книги. – *Прим. пер.*)

Проблема Ферма получила широкую огласку из-за сенсационного вознаграждения в 100 000 марок, предложенного за ее полное решение. Эти деньги были завещаны в 1908 году доктором Вольфскелем, который сам много времени посвятил этой проблеме, не добившись тем не менее никакого успеха. С тех пор многие любители, которые до того направляли свою энергию на решение таких проблем, как *квадратура круга*, *трисекция угла* или изобретение *вечного двигателя*, начали сосредотачиваться на теореме Ферма. За период с 1908 по 1911 года более тысячи таких «полных» решений поступило в комитет по присуждению премии. К счастью, обязательное условие, что работа должна быть опубликована, возможно, охладило пыл многих соискателей. Интересно отметить, что большинство представленных на рассмотрение «решений» было издано самими авторами. Для всех этих работ характерно полное пренебрежение их авторами громадного объема уже проделанной работы, а также незаинтересованность в изучении того, в чем же таится основная проблема.

Эта проблема привлекала внимание величайших математиков последних трех столетий Эйлера и Лагранжа, Куммера и Римана, которые безуспешно пытались доказать или опровергнуть теорему. Если собрать вместе все работы, посвященные этой проблеме или связанные с ней, то получится небольшая библиотека.

Из этих попыток доказать теорему Ферма выросла новая наука, которая значительно превосходит по важности первоначальную проблему. Некоторые из полученных результатов так важны и открывают настолько широкие перспективы, что можно считать, нам повезло, что исходная задача так и не была решена. Так, при попытке доказать теорему Ферма Эдуард Куммер создал свою знаменитую теорию *идеальных чисел*, что явилось одним из самых фундаментальных и плодотворных достижений девятнадцатого века. Однако в рамках этой книги я не могу привести даже краткое описание этой повлекшей за собой важнейшие последствия концепции.

Появившись на свет из религиозного мистицизма, теория целых чисел прошла через стадию случайных решений головоломок, прежде чем приобрела статус науки.

Хотя тем, кто отождествляет мистическое с абстрактным, это может показаться парадоксальным, но основа мистицизма чисел была вполне конкретной. Она вращалась вокруг двух идей. Образные числа пифагорейцев очень древнего происхождения указывают на тесную связь между *формой* и *числом*. Числа, с которыми можно сопоставить простые и правильные фигуры, такие как треугольники, квадраты, пирамиды и кубы, легко представить, поэтому их и выделяли как имеющие особую важность. С другой стороны, существуют совершенные, дружественные и простые числа, обладающие особыми свойствами по отношению к делимости. Это возвращает нас к важности, которую древние народы придавали проблемам *распределения*, что становится ясно из глиняных табличек шумеров и древнейших папирусов египтян.

Эта конкретность объясняет экспериментальный характер науки в древности; характер, который теория чисел до определенной степени сохраняет и в наши дни. Я предоставляю слово одному из самых блестящих теоретиков наших дней англичанину Г.Х. Харди.

«Теория чисел в большей степени, чем другие разделы математики, началась как экспериментальная наука. Ее самые знаменитые теоремы были высказаны в виде догадок, иногда более чем за сто лет до того, как они были доказаны; а догадки возникли на основании большого количества вычислений».

Конкретное всегда предшествует абстрактному. Вот почему теория чисел появилась раньше арифметики. И конкретное всегда тормозило развитие науки. Своеобразное очарование *отдельных* чисел воздействовало на разум человека с незапамятных времен и было главным препятствием на пути развития *коллективной* теории чисел, т.е. арифметики; точно так же конкретный интерес к отдельным звездам долго сдерживал развитие научной астрономии.

ГЛАВА 4

ПОСЛЕДНЕЕ ЧИСЛО

> Итак, то самое, что было сказано однажды, можно повторять до бесконечности.
>
> *Зенон из Элеи, как его цитировал Симплиций*

Что такого есть в математике, что делает ее признанной моделью для тех наук, которые называются точными, и идеалом для более молодых наук, к которым такое отличие пока неприменимо? Действительно, общепризнанны честолюбивые замыслы молодых исследователей, по крайней мере, в таких областях, как биология или общественные науки, разработать стандарты и методы, которые позволят присоединиться к быстро увеличивающемуся ряду наук, в которых уже признано доминирование математики.

Математика – это не только модель, равняясь на которую точные науки стремятся формировать свою структуру; математика – это цемент, связывающий всю структуру вместе. Задача, фактически, не может считаться решенной до тех пор, пока исследуемое явление не сформулировано в виде математического закона. Почему считается, что только математическая формулировка может дать наблюдению, эксперименту или рассуждению ту точность, лаконичность и жесткую определенность, которую требуют точные науки?

Когда мы анализируем математические процессы, мы видим, что в их основе лежат два понятия: Число и Функция; что Функция сама по себе, в конечном счете, может быть сведена к Числу; что общая концепция Числа в свою очередь основана на свойствах, которые мы приписываем натуральному ряду: один, два, три... И именно в свойствах целых чисел мы можем надеяться найти ключ к пониманию этой безоговорочной веры в непогрешимость математических умозаключений!

Первое практическое применение этих свойств принимает форму элементарных арифметических операций: *сложение*, *вычитание*, *умножение* и *деление* целых чисел. Мы изучаем эти операции в очень раннем возрасте, и не удивительно, что большинство из нас полностью забывают обстоятельства, при которых мы ими овладевали. Давайте освежим нашу память.

Мы начинали с запоминания таблицы: $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, ... Мы зубрили и зубрили до тех пор, пока не начинали уверенно складывать любые два числа в пределах десяти. Во время этой первый фазы обучения нас учили замечать, что $5 + 3 = 3 + 5$ и что это не случайно, но является общим правилом. Позднее нас научили описывать это свойство сложения следующими словами: *от перемены мест слагаемых сумма не изменяется.* Когда математик говорит, что *операция сложения обладает свойством коммутативности*, и записывает это в символьном виде как

$$a + b = b + a,$$

он на самом деле говорит то же самое.

Затем нам показали, что $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$. То есть запись $(2 + 3) + 4$ означает, что сначала мы складываем 2 и 3, а потом к результату прибавляем 4. Но на самом деле не важно, в каком порядке мы складываем числа, потому что результат будет таким же, если мы к 2 прибавим сумму $(3 + 4)$. Математик говорит, что операция сложения обладает *ассоциативностью* и пишет

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

имея в виду то же самое.

Мы никогда не придаем большого значения этим формулировкам. Однако они являются фундаментальными. На них основаны правила сложения больших чисел. Схема

$$\begin{array}{l} 25 \\ 34 \\ \underline{56} \\ 115 \end{array}$$

это не что иное, как компактная запись следующих действий:

$$25 + 34 + 56 = (20 + 5) + (30 + 4) + (50 + 6) =$$
$$= (20 + 30 + 50) + (5 + 4 + 6) = 100 + 15 = 115,$$

в которых ассоциативность и коммутативность играют фундаментальную роль.

Затем мы переходим к *умножению.* Снова мы запоминали длинную таблицу, до тех пор пока не могли произнести механически произведение любых двух чисел в пределах от 1 до 10. После этого мы заметили, что, как и сложение, *умножение обладает*

свойствами коммутативности и ассоциативности. Не важно, что мы не использовали этих слов, поскольку они подразумевались.

Есть еще одно свойство, которое касается сочетания умножения и сложения. Произведение 7 × (2 + 3) означает, что семь нужно умножить на сумму (2 + 3), т.е. на пять. Но тот же самый результат можно получить, складывая результат двух умножений: (7 × 2) и (7 × 3). Математик выразит это общей формулировкой: умножение *дистрибутивно* по отношению к сложению и запишет

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Именно свойство дистрибутивности лежит в основе схемы, которую мы используем при перемножении чисел, больших десяти. В самом деле, если мы проанализируем следующую операцию:

$$\begin{array}{l} 25 \\ \times\, 43 \\ \hline 75 \\ +\, 100 \\ \hline 1075, \end{array}$$

мы обнаружим, что это компактная запись последовательности действий, в которых свойство дистрибутивности активно используется. Таким образом

$$25 \times 43 = (20 + 5) \times (40 + 3) = [(20 + 5) \times 3] + [(20 + 5) \times 40] =$$
$$= (20 \times 3) + (5 \times 3) + (20 \times 40) + (5 \times 40) = 75 + 1000 = 1075.$$

Таковы факты, которые формируют основу математического образования всего мыслящего человечества, более того, всех людей, которые вообще учились в школе. На этих фактах строится *арифметика*, основа математики, которая применяется во всех науках, как в чистых, так и в прикладных, являющихся, в свою очередь, плодотворным источником всего технического прогресса.

Позднее новые факты, новые идеи и новые понятия были добавлены к нашему интеллектуальному багажу, но ничего из этого не придает нашему мышлению такой уверенности, такой прочной основательности, как эти свойства целых чисел, которые мы усваиваем в раннем возрасте в шесть лет. Это выражено в популярной присказке: «Очевидно, как дважды два — четыре».

Эти правила мы узнали в том возрасте, когда основной наш вопрос был «как?». К тому времени, когда мы стали достаточно взрослыми, чтобы задать вопрос «почему?», эти правила, благодаря постоянному использованию, стали настолько неотъемлемой частью нашего мышления, что мы принимаем их уже как должное.

Предполагается, что индивидуум в своем развитии проходит все стадии эволюции вида, к которому он принадлежит. Приблизительно таким же принципом определяется и развитие человеческого интеллекта. В истории математики вопрос «как?» всегда предшествовал вопросу «почему?»; технические приемы предшествовали философии.

Это особенно справедливо в отношении арифметики. Техника счета и правила вычислений были упрочившимися фактами уже в конце эпохи Возрождения. Но философия числа не заняла своего места до последней четверти девятнадцатого века.

По мере того как мы становимся старше, мы обнаруживаем множество возможностей применять эти правила в нашей повседневной жизни и все больше и больше убеждаемся в их общности. Сила арифметики заключается в ее *абсолютной общности*. У этих правил нет исключений: они применимы ко *всем числам*.

Все числа! Все заключено в этом коротком, но удивительно важном слове «*все*».

В этом слове нет тайны, когда оно применяется к *конечному* набору предметов или обстоятельств. Когда, например, мы говорим «все живущие люди», мы связываем с этим вполне определенное значение. Мы можем представить все человечество упорядоченным по какому-либо определенному признаку; в этой совокупности будет *первый* человек и будет *последний* человек. Конечно, чтобы доказать со всей строгостью, что какое-то утверждение справедливо для всех живущих людей, мы должны доказать это утверждение для каждого человека в отдельности. Хотя мы осознаем, что реальное осуществление такой процедуры столкнется с непреодолимыми трудностями, мы понимаем, что эти трудности носят чисто *технический*, а не *концептуальный* характер. И это справедливо для любой конечной совокупности, т.е. такой совокупности, в которой есть *последний* так же, как и *первый* элемент, а значит, *все объекты совокупности могут быть исчерпаны при счете*.

Разве мы подразумеваем то же самое, когда говорим *все числа*? В этом случае совокупность также может быть упорядочена и в этой совокупности будет первый элемент, число *один*. Но как насчет последнего?

Ответ готов: *последнего числа нет*! Процесс подсчета чисел, по-видимому, не может быть завершен. *Для каждого числа существует последующее число*. Существует *бесконечно* много чисел.

Но если нет последнего числа, то, что мы подразумеваем под всеми числами и, в частности, что мы имеем в виду, когда говорим о *свойствах всех чисел.* Как мы можем доказать такое свойство – проверить его для каждого отдельного числа невозможно, поскольку мы знаем заранее, что все числа исчерпать нельзя.

Итак, в самом начале изучения математики мы обнаруживаем эту *дилемму бесконечности*, которая, как легендарный дракон, охраняет вход в зачарованный сад.

В чем источник этой концепции бесконечности, этой веры в неисчерпаемость процесса счета? Он приходит к нам с опытом? Ну конечно нет! Опыт учит нас конечности всех вещей, конечности всего, что делает человек. Мы знаем, что любая наша попытка исчерпать числа в процессе счета закончится только вместе с концом нашего существования.

К тому же существование бесконечности нельзя доказать математически, поскольку бесконечность, неисчерпаемость процесса подсчета является математическим предположением, *фундаментальным предположением арифметики*, на котором основано все здание математики. Может быть, это сверхъестественная истина, один из тех даров, которые Творец пожаловал человеку, когда сбросил его на Землю, голого и невежественного, но способного развиваться? Или эта концепция бесконечности выросла вместе с человеком, выросла из тщетных попыток достичь последнего числа? Может быть, это признание неспособности человека исчерпать вселенную числом?

«Последнее число существует, но не в силах человека постичь его, так как оно принадлежит богам». Такая идея встречается в большинстве древних религий. Звезды в небе, песчинки в пустыне, капли в океане являют примеры таких больших чисел, которые человеческий разум не может постичь. «Он сосчитал все звезды и дал им имена» – говорит автор псалма о Иегове. И Моисей, говоря об обещании Бога своему избранному народу, сказал: «Он, сосчитавший все частицы на Земле, также сосчитает и ваше потомство».

«Некоторые люди, о царь Гелон, думают что количество песка бесконечно; здесь под песком я понимаю не только тот песок, который находится в окрестностях Сиракуз или в остальных областях Сицилии, но весь песок всей суши как обитаемой, так и необитаемой. Другие признают, что количество песка не бесконечно, но думают, что нет такого числа, которое было бы достаточно большим, чтобы выразить это количество. Если бы эти люди представили себе кучу песка величиной в земной шар, причем этим песком были бы покрыты все моря и все углубления до вершины величайших гор, то, конечно, люди тем более были бы склонны принять, что не существует числа, превосходящего число песчинок в этой куче.

Но я попытаюсь показать Вам при помощи геометрических построений, которые Вы сможете понять, что те числа, которые я описал в работе, посланной Зевксиппу, могут выразить не только число, превосходящее число песчинок в куче, равной земному шару, но даже число песчинок в куче, равной всей Вселенной».

(Архимед. О числе песчинок)

Вселенной для Архимеда был шар, ограниченный неподвижными звездами. Диаметр этой сферы он оценивал примерно как 10 000 диаметров Земли. Считая, что в одном маковом зерне помещается 10 000 песчинок и что диаметр Земли не превышает 10 000 миль (300 000 стадий), он вычислил, что количество песчинок, которыми можно было бы заполнить его вселенную, будет выражаться фантастическим числом, которое в современной записи содержало бы 52 цифры. Чтобы выразить это число, Архимед придумал новую единицу, *октаду*, которая соответствует современным 100 000. (Здесь Данциг ошибся. См. «Замечания» в конце книги. — *Прим. пер.*)

Другим примером является история попыток решить задачу квадратуры круга. В исходном виде задача заключалась в том, чтобы при помощи циркуля и линейки построить квадрат, равный по площади данному кругу. Конечно, можно построить квадрат, равный по площади вписанному правильному многоугольнику, например восьмиугольнику. С другой стороны, известно, что, увеличивая количество сторон вписанного многоугольника до 16, 32, 64 и т.д., мы будем приближаться к площади круга все более точно. Нет сомнений, что некоторые греческие геометры рассматривали этот процесс увеличения количества сторон не как приближение, но как средство достичь формы окружности, то есть они полагали, что если достаточно долго продолжать этот процесс, то, в конце концов, получится завершающий многоугольник, который будет в каждой точке совпадать с окружностью.

Вполне вероятно, что ранняя концепция бесконечности состояла не в невозможности сосчитать, а в том, что величина пока не сосчитана. Последнее число означало *терпение* и *настойчи-*

вость, и казалось, что человек не обладал этими качествами в достаточной степени. Это то же самое, что и достижение Небес в *истории с Вавилонской башней. Последнее число*, как и Небеса, принадлежит Богу. Дерзновенная идея разгневала Бога, и Он смешал языки строителей.

Путаница в языках существует и по сей день. В связи с бесконечностью возникло множество математических парадоксов: начиная с апорий Зенона и до антимоний Канта и Кантора. Эту историю я расскажу в других главах. Сейчас для нас важно, что эти парадоксы помогли сформироваться более серьезному отношению к основам арифметики. Свойства целых чисел составляют основу математики; и если эти основы можно доказать при помощи *формальной* логики, то всю математику можно считать логической дисциплиной. Однако, если логика не способна установить эти свойства, тогда математика основана на чем-то большем, чем просто логика, — ее созидательная мощь заключена в такой неуловимой, неосязаемой вещи как человеческая *интуиция*.

Давайте исключим недопонимание! Сомнению сейчас подвергается не обоснованность свойств чисел; проблема заключается в обоснованности аргументов, с помощью которых обоснованность этих свойств чисел доказывается. Вопросы, которые являются спорными с тех пор, как основы математики были подвергнуты тщательному анализу, вопросы, которые разделили ведущих мыслителей в области математики на два противоборствующих лагеря: *интуиционистов* и *формалистов*, заключаются в следующем: Что представляет собой математическое доказательство? Какова природа умозаключений вообще и математических умозаключений в частности? Что означает математическое понятие *существования*?

Итак, законы здравого смысла стары как мир. Их систематически изложил Аристотель, но они были известны задолго до него. Да, ведь они составляют саму основу интеллекта человека: каждый разумный человек имеет возможность применять эти законы в своей повседневной жизни. Он знает, что нужно для того, чтобы его доводы звучали обоснованно. Сначала он недвусмысленно определяет свои предпосылки, а затем шаг за шагом, используя каноны формальной логики, приходит к окончательному выводу, который является *единственно* возможным следствием из всего предшествующего логического процесса.

Если этот вывод не соответствует наблюдаемым фактам, то, прежде всего, следует проверить, корректно ли мы применяли правила логики. Здесь мы не будем обсуждать обоснованность канонов логики. Не то чтобы они вообще избежали жестоких нападок в эпоху критики. Совсем наоборот: один из них является предметом споров в течение четверти века, но и накал полемики не ослабляется. Однако это отдельная история, и она будет рассказана в соответствующем месте.

Если мы обнаружили, что каноны логики применялись правильно, то наблюдается несоответствие; и это несоответствие может означать, что наши предпосылки были неверны. Либо где-то в наших допущениях содержится непоследовательность, либо одна из предпосылок противоречит другой.

Действительно, установить ряд предположений для какой-либо конкретной области знаний не простая задача. Для этого нужен не только отточенный аналитический ум, но и превосходные навыки. Кроме того что предположения должны быть непротиворечивы, желательно чтобы каждое предположение было независимо от всех остальных и чтобы вся система была полной, т.е. всецело охватывала исследуемый вопрос. Область математики, которая занимается такими вопросами, называется *аксиоматикой*. В этой области работали такие математики, как Пеано, Рассел, Гильберт. Так логика, когда-то прежде являвшаяся разделом философии, постепенно вплетается в математику.

Вернемся к нашей задаче. Допустим, мы проверили наши предпосылки и не обнаружили в них противоречий. Тогда мы говорим, что наш вывод логически безупречен. Если тем не менее наш вывод не соответствует наблюдаемым фактам, то мы можем сказать, что наши предположения не годятся для той конкретной проблемы, для которой они были использованы. Нет ничего плохого в подгонке костюма. Если он топорщится в некоторых местах и трещит в других, это ошибка *закройщика*.

Только что описанный принцип рассуждений называется *дедукцией*. Он заключается в том, что мы начинаем с самых общих предположений, которые принимают форму *определений*, *постулатов* или *аксиом*. И из них посредством канонов логики мы выводим некоторые утверждения, касающиеся предметов или обстоятельств.

Процесс дедукции характерен для математических рассуждений. Он практически полностью реализован в геометрии, и в силу этого логическая структура геометрии служит моделью для всех точных наук.

Сущность другого метода, используемого в научных исследованиях, – индукции – абсолютно иная. Его обычно описывают как переход от частного к общему. Это результат наблюдения и опыта. Чтобы определить свойство определенного класса объектов, мы повторяем наблюдения или эксперименты как можно большее количество раз и в как можно более близких условиях. После чего в наших экспериментах или наблюдениях может проявиться некоторая определенная закономерность. Тогда эта закономерность принимается как свойство этого класса. Например, если мы исследуем воздействие тепла на достаточно большое количество испытательных образцов из свинца и обнаружим, что всякий раз свинец начинает плавиться, когда температура достигает 328°, мы можем сделать вывод, что температура плавления свинца составляет 328°. Основу таких выводов составляет убеждение, что независимо от количества экспериментов если условия их проведения одинаковы, то одинаковыми будут и результаты.

Этот процесс индукции является базовым для всех экспериментальных наук, но он совершенно неприемлем в строгой математике. Не только доказательство математической теоремы таким способом выглядит смешным, но даже проверка установленной истины таким методом неприемлема. *Итак, сколько бы раз ни подтверждалось то или иное предположение, для доказательства математической теоремы этого недостаточно; но, чтобы опровергнуть утверждение, достаточно одного примера.* Математическое утверждение является истинным, если оно не приводит к логическому противоречию, иначе оно неверно. *Метод дедукции основан на принципе взаимоисключения и только на нем.*

Индукция запрещена в математике по важным причинам. Рассмотрим квадратичное выражение ($n^2 - n + 41$), о котором я уже говорил в предыдущей главе. Мы вычисляли значение этого выражения для всех n от 1 до 40 и в каждом случае в результате получали простое число. Следует ли из этого, что для любого n это выражение будет давать простое число? Даже самый неискушенный в математике читатель увидит ошибочность этого утверждения, хотя многие физические законы считаются верными на основании даже меньшего количества наблюдений.

Математика основана на дедукции, арифметика – область математики. Индукция тут неприемлема. Законы арифметики, такие свойства операций, как ассоциативность, дистрибутивность и коммутативность, которые играют важную роль даже в простых вычислениях, должны быть доказаны методами дедукции. Какой метод для этого использовать?

Этот метод называют по-разному: *математической индукцией*, *полной индукцией* или *умозаключением по рекурсии*. Приемлемым является только последнее название, в остальных случаях термин употребляется неправильно. Слово «индукция» абсолютно неточно передает суть метода, в котором вовсе не предполагается систематического проведения проб.

Чтобы проиллюстрировать этот метод примером из знакомой нам области, представим себе шеренгу солдат. Каждому из них дали задание любую информацию, которую он может получить, передавать своему соседу справа. Допустим, офицер хочет убедиться в том, что *все* солдаты знают о том, что произошло определенное событие. Нужно ли ему спрашивать у каждого солдата? Нет. Если офицер уверен в том, что все, что знает каждый солдат, знает и его сосед справа, ему достаточно убедиться, что *первый* слева солдат знает о событии, после чего офицер сможет сделать вывод, что *все* солдаты знают о происшедшем.

Здесь мы использовали рассуждения, основанные на рекурсии. Они состоят из двух этапов. На первом из них мы должны показать, что предположение, которое мы хотим доказать, принадлежит к типу, который Бертран Рассел называл *наследственным*: т.е. если это предположение было верно для какого-либо элемента некоторой последовательности, то его справедливость для *последующего* элемента следует из логической необходимости. Это так называемый шаг *индукции*. На втором этапе нужно показать, что утверждение верно для первого элемента последовательности. (Это базис *индукции*. — *Прим. пер.*) Теперь мы знаем, что раз первый элемент последовательности обладает каким-то свойством и это свойство является наследуемым, то и второй элемент последовательности обладает этим свойством, и третий, и т.д. Мы можем продолжать до тех пор, пока не исчерпаем всю последовательность, т.е. не придем к ее *последнему* элементу.

При доказательстве по индукции необходимы как обоснование, касающееся первого элемента, так и наследование. По отдельности они ничего не доказывают. В качестве иллюстрации обратимся к двум теоремам Ферма. Первая теорема состоит в утверждении, что числа вида $2^{2^n} + 1$ являются простыми для любого значения n. Ферма показал простой подстановкой, что это верно для $n = 0, 1, 2, 3$ и 4. Но доказать наследственность этого свойства он не смог. И, как мы уже знаем, Эйлер опроверг эту теорему, показав, что для $n = 5$ она неверна. Вторая теорема утверждает, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ неразрешимо в целых числах, если n – целое число, большее двух. В данном случае на первом этапе индукции является доказательство того факта, что уравнение $x^3 + y^3 = z^3$ неразрешимо в целых числах. Возможно, Ферма знал, как это доказать, и если так, то это и послужило поводом для его знаменитой пометки на полях. Как бы то ни было, мы знаем, что это утверждение доказал Эйлер. Осталось только показать, что это свойство является наследственным, т.е. надо доказать, что если это утверждение верно для некоторого значения числа n, например для p, то из логической необходимости вытекает, что уравнение $x^{p+1} + y^{p+1} = z^p$ неразрешимо в целых числах.

Необходимо отметить, что первая точная формулировка принципа рекурсии принадлежит гениальному Блезу Паскалю, современнику и другу Ферма. В 1654 году Паскаль сформулировал его в своем трактате «Арифметический треугольник». Позже стало понятно, что истинный смысл этого трактата заключался в переписке между Паскалем и Ферма по некоторым вопросам, касающимся азартных игр; теперь считается, что именно эта переписка положила начало теории вероятности.

Подходящим предметом для размышлений о загадочном является то, что и метод умозаключений по рекурсии, составляющий основу чистой математики, и теория вероятности, базовая для всех наук, опирающихся на индукцию, появились в процессе рассуждений о распределении ставок в незаконченной партии двух игроков.

То, как принцип математической индукции применяется в арифметике, можно проиллюстрировать, доказав, что операция сложения обладает свойством ассоциативности. В символьной записи это означает:

$$a + (b + c) = (a + b) + c. \qquad (1)$$

Давайте проанализируем операцию $a + b$: она означает, что к числу a сначала прибавляют 1, затем еще 1, и так b раз. Аналогично выражение $a + (b + 1)$ означает $b + 1$ последовательных прибавлений 1 к числу a. Отсюда следует, что

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1 \qquad (2)$$

и предположение (1) доказано для случая $c = 1$. То, что было сделано до сих пор, составляет базис индукции нашего доказательства.

Теперь нужно доказать наследственность. Предположим, что утверждение верно для некоторого значения c, например для n, то есть

$$a + (b + n) = (a + b) + n. \tag{3}$$

Прибавим 1 к обеим частям выражения:

$$[a + (b + n)] + 1 = [(a + b) + n] + 1. \tag{4}$$

В силу справедливости (2) отсюда следует, что

$$(a + b) + (n + 1) = a + [(b + n) + 1]. \tag{5}$$

В силу того же равенства (2) это эквивалентно следующему

$$(a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)]. \tag{6}$$

Но это и есть утверждение (1) для случая $c = n + 1$.

Таким образом, из предположения, что утверждение верно для некоторого числа n, вытекает с *логической необходимостью*, что оно будет верно и для следующего числа $n + 1$. Тогда, поскольку утверждение верно для 1, следовательно, оно верно и для 2, и для 3 и так далее до *бесконечности*.

Принцип математической индукции в более общем виде, чем он применялся ранее, может быть сформулирован следующим образом: Если известно, что некоторое утверждение о последовательности верно для первого элемента этой последовательности и что из предположения о том, что оно верно для некоторого произвольного элемента этой последовательности, логически следует, что оно будет верно и для следующего элемента, то можно сделать вывод, что оно верно для всех элементов последовательности. Разница между *ограниченным* принципом, который использовался в примере с солдатами, и *общем* принципом, который используется в арифметике, заключается в интерпретации слова *все*.

Давайте я повторю: при помощи общего, а не ограниченного принципа математической индукции мы доказали обоснованность арифметических действий, которую принимали на веру, когда только начинали постигать тайны чисел.

Приведенная далее цитата взята из статьи Анри Пуанкаре озаглавленной «Природа математических рассуждений». Этот эпохальный труд появился в 1894 году и стал первым в серии статей, посвященных исследованию основ точных наук. Для большого количества математиков эта работа стала сигналом к началу пересмотра классических концепций. Этот пересмотр завершился практически полным включением логики в основы математики.

Большой авторитет Пуанкаре, красота его стиля и бунтарская смелость идей привели к тому, что эта работа стала известна далеко за пределами ограниченного круга математиков. Некоторые биографы считают, что количество читателей достигло полумиллиона; никто из математиков до Пуанкаре никогда не обращался к такому количеству людей.

Сам Пуанкаре внес вклад практически во все разделы математики, физики, механики небесных тел, и, благодаря потрясающей способности к самонаблюдению, он смог проанализировать источники своих собственных достижений. Его проницательный ум особенно интересовали самые элементарные понятия; те, которые косность человеческих привычек сделала непостижимыми. К таким понятиям относятся *число*, *пространство* и *время*.

«Сама возможность математического познания кажется неразрешимым противоречием. Если эта наука является дедуктивной только по внешности, то откуда у нее берется та совершенная строгость, которую никто не решается подвергать сомнению? Если, напротив, все утверждения, которые она выдвигает, могут быть выведены одни из других по правилам формальной логики, то каким образом математика не сводится к бесконечной тавтологии? Силлогизм не может нас научить ничему существенно новому, и если все должно вытекать из закона тождества, то все также должно к нему и приводиться. Но неужели возможно допустить, что изложение всех теорем, которые заполняют столько томов, есть не что иное, как замаскированный прием говорить, что А есть А?

Конечно, можно добраться до аксиом, которые лежат в источнике всех этих рассуждений. И если, с одной стороны, держаться этого мнения, мы решим, что их нельзя свести к закону противоречия, с другой — не желать видеть в них только факты опыта... то имеется еще надежда отнести их к числу [синтетических] априорных суждений. Но это не значит разрешить затруднение; это значит только дать ему название...

Способ рассуждения путем рекурренции не сводим к закону противоречия... Это правило не может происходить и из опыта; опыт нас может научить только тому, что это правило справедливо, например, *для десяти*, *для ста первых чисел*; он не может простираться на бесконечный ряд чисел, а лишь на большую или меньшую часть этого ряда, всегда ограниченную.

Если бы дело шло только об этом, закон противоречия был бы достаточен — он всегда позволил бы нам развить столько силлогизмов, сколько мы желаем; лишь когда дело идет об охвате бесконечности одной формулой, лишь перед бесконечным рушится этот закон, но там становится бессилен и опыт...

Почему же это суждение стоит перед нами с непреодолимой очевидностью? Здесь сказывается только утверждение могущества разума, который способен постичь бесконечное повторение одного и того же акта, раз этот акт оказался возможным однажды...

Нельзя не признать, что здесь существует поразительная схожесть с обычными способами индукции. Однако есть и существенное различие. Индукция, применяемая в физических науках, всегда недостоверна, потому что *она опирается на веру* во всеобщий порядок Вселенной — порядок, который находится вне нас. Индукция математическая, т.е. доказательство путем рекурренции, напротив, представляется с необходимостью, потому что она есть только подтверждение одного из свойств самого разума...

Мы можем подняться выше только благодаря математической индукции, которая одна может научить нас чему-либо новому. Без помощи такой индукции, отличной [в известных отношениях] от индукции физической, но столь же плодотворной, дедукция была бы бессильна создать науку.

Заметим, наконец, что эта индукция возможна только тогда, когда одна и та же операция может повторяться бесконечное количество раз. Вот причина, почему теория шахматной игры никогда не может стать наукой; там различные ходы одной и той же партии не похожи друг на друга».

(Из книги «О науке», 1983)

Последнее слово должно оставаться за великими, поэтому здесь мне бы следовало закончить главу. Но история не признает авторитетов: идеи Пуанкаре стали причиной полемики, которая продолжается и в наши дни. Следовательно, я должен добавить несколько слов от себя; не потому что надеюсь внести что-либо новое в суть вопроса, по которому уже так исчерпывающе высказались выдающиеся представители обеих сторон; но чтобы более отчетливо сформулировать саму причину разногласий.

Умозаключения по рекурсии, если они применяются к конечной последовательности чисел, логически неопровержимы. В этом *ограниченном* смысле принцип утверждает, что если предположение обладает свойством наследственности, то оно истинно или ложно для любого элемента последовательности, если оно истинно или ложно для первого элемента последовательности.

Ограниченного принципа достаточно, чтобы построить конечную, замкнутую арифметику. Например, мы могли бы ограничить натуральный ряд каким-то физиологическим или психологическим пределом, к примеру числом 1 000 000. В такой арифметике операции сложения или умножения, когда они возможны, были бы ассоциативны и коммутативны; но эти операции будут возможны не всегда. Такие выражения, как (500 000 + 500 001) или (1000 × 1001), были бы бессмысленны, и очевидно, что количество бессмысленных выражений будет намного превышать количество выражений, имеющих смысл. Этому ограничению на целые числа соответствовало бы ограничение на дроби: у десятичных дробей не могло бы быть больше 6 знаков и преобразование такой дроби как $^1/_3$ к десятичному виду было бы лишено смысла. Бесконечная делимость вообще была бы лишена смысла, так же как и бесконечное увеличение. И мы достигли бы предела делимости, разделив любой объект на миллион равных частей.

Аналогичная ситуация возникнет и в геометрии, если вместо того чтобы считать плоскость бесконечно продолжающейся во всех направлениях, мы будем рассматривать лишь *ограниченную область* плоскости, например окружность. В такой ограниченной геометрии пересечение двух прямых зависит от случая; две произвольно взятые прямые не будут определять угол, а три произвольно взятые прямые – треугольник.

Да, но эти ограниченные арифметика и геометрия не только логически непротиворечивы, но, как ни странно это кажется на первый взгляд, они ближе к реальности, воспринимаемой нашими чувствами, чем неограниченность, являющаяся наследием человечества.

Ограниченный принцип математической индукции включает в себя конечную цепочку силлогизмов, каждый из которых непротиворечив сам по себе: по этой причине этот принцип является следствием классической логики.

Но метод, который применяется в арифметике, это *общий* принцип полной индукции, далеко выходящий за пределы ограничений, накладываемых ограниченным принципом. Суть проблемы не в том, что мы говорим, что если некоторое утверждение истинно для 1, то оно истинно и для всех чисел при условии, что если оно истинно для некоторого числа, то оно истинно и для следующего за ним числа. *Тут молчаливо предполагается, что для каждого числа существует следующее число.*

Это утверждение не является логической необходимостью и не является следствием законов классической логики. Это утверждение не возникает как единственно возможное, более того, его противоположность, постулат о конечности числовой последовательности, приводит к ограниченной арифметике, которая является такой логичной. Это утверждение не выводится из нашего непосредственного опыта или из наших чувств; наоборот, все эксперименты указывают на его ложность. И наконец, это утверждение не является следствием исторического развития экспериментальных наук, поскольку все новейшие данные указывают на ограниченность вселенной и в свете последних открытий в области структуры атома бесконечная делимость материи также может оказаться мифом.

И все же концепция бесконечности, хотя и не вытекает ни из логики, ни из опыта, является *математической необходимостью.* Но тогда на чем же основана способность разума представить себе бесконечное повторение того действия, которое может быть выполнено хотя бы один раз? К этому вопросу я буду возвращаться вновь и вновь на протяжении всей книги.

ГЛАВА 5

СИМВОЛЫ

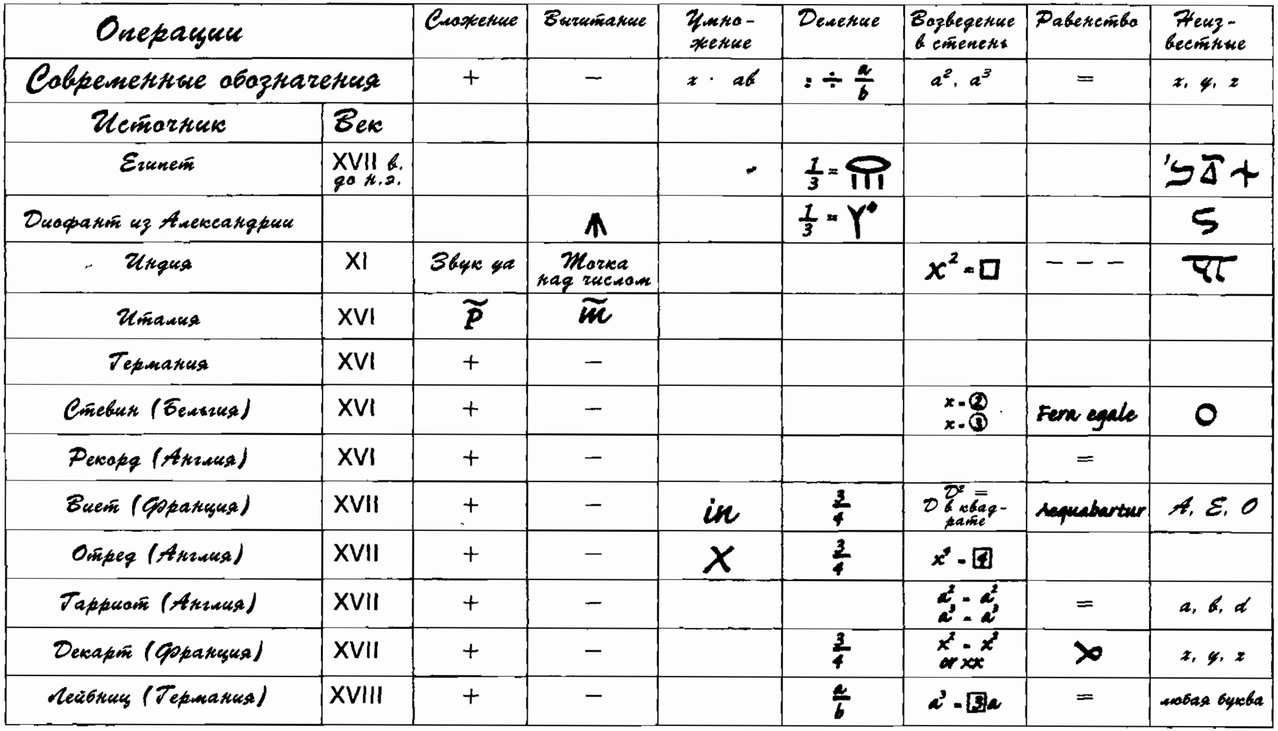
> Трудно отделаться от мысли, что математическим формулам присуща самостоятельная жизнь, что они умнее нас и умнее даже открывшего их, что они дают больше, чем в них было ранее вложено.
>
> *Генрих Герц*

Алгебра в том широком смысле, который используется в наши дни, это наука об операциях в их символьной записи. Благодаря своей мощности, она не только пронизывает насквозь всю математику, но и вторгается в области формальной логики и даже метафизики. Кроме того, если рассматривать алгебру с такой точки зрения, то окажется что эта наука так же стара, как и способность человека оперировать с общими суждениями; как умение различать понятия *некоторый* и *любой*.

Здесь нас интересует алгебра в гораздо более узком смысле: та часть общей алгебры, которую очень точно называют *теорией уравнений*. Этот более узкий смысл вкладывали в слово алгебра в самом начале становления этой науки. Само слово имеет арабское происхождение. «Al» – это арабский определенный артикль (как «the» в английском), «gebar» – устанавливать, восстанавливать. До наших дней словом «Algebrista» в Испании называют костоправов (что-то вроде хиропрактиков).

Вероятно, слово алгебра произошло от переделанного названия книги, написанной Мохаммедом бен-Мусса аль-Хорезми, тем самым аль-Хорезми, который, как мы уже видели, внес значительный вклад в развитие позиционного способа записи чисел. Полное название этой книги «Algebar wal Muquabalah (Аль-джебр вал-мукабала)», что дословно переводится как «Восполнение и противопоставление». Словом восстановление бен-Мусса называл то, что сегодня мы называем *переносом*, т.е. перемещение членов уравнения с одной стороны равенства в другую, например переход от $3x + 7 = 25$ к $3x = 25 - 7$.

Признаки примитивной алгебры можно найти на глиняных табличках шумеров. Древнеегипетские папирусы говорят нам, что



Операции		Сложение	Вычитание	Умножение	Деление	Возведение в степень	Равенство	Неизвестные
Современные обозначения		+	−	x · ab	: ÷ $\frac{a}{b}$	a^2, a^3	=	x, y, z
Источник	Век							
Египет	XVII в. до н.э.			'	$\frac{1}{3}$ = 𓂋III			[illegible]
Диофант из Александрии			⋔		$\frac{1}{3}$ = γ'			ς
Индия	XI	Звук уа	Точка над числом			x^2 = □	— — —	या
Италия	XVI	$\tilde{p}$	$\tilde{m}$					
Германия	XVI	+	−					
Стевин (Бельгия)	XVI	+	−			x = ② x = ③	Fern egale	○
Рекорд (Англия)	XVI	+	−				=	
Виет (Франция)	XVII	+	−	in	$\frac{3}{4}$	D^2 = D в квадрате	Aequabartur	A, E, O
Отред (Англия)	XVII	+	−	X	$\frac{3}{4}$	x^4 = $\boxed{4}$		
Гарриот (Англия)	XVII	+	−			a^2 = a^2 a^3 = a^3	=	a, b, d
Декарт (Франция)	XVII	+	−		$\frac{3}{4}$	x^2 = x^2 or xx	∝	x, y, z
Лейбниц (Германия)	XVIII	+	−		$\frac{a}{b}$	a^3 = $\boxed{3}a$	=	любая буква

Эволюция символов

в Египте эта наука, вероятно, была развита в достаточно высокой степени. В самом деле, папирус Ринда, датируемый не позже XVIII века до н.э., касается проблем *распределения* еды и других припасов; проблем, которые приводят к простым уравнениям. Неизвестное в этом уравнении обозначается как *hau* — «много»; операции сложения и вычитания обозначаются ногами человека, идущего к символу операнда или от него. Папирус подписан именем Ахмес. Однако, судя по наличию множества грубых ошибок в тексте, он был простым переписчиком и мало что понимал из того, что переписывал. Поэтому можно предположить, что уровень знаний древних египтян был выше, чем может показаться на основании этого папируса. Если это так, то нет никаких сомнений в том, что алгебра в Египте появилась на несколько веков раньше, чем этот папирус.

Как правило, алгебра в своем развитии в каждой отдельной стране последовательно проходила три этапа: *риторический*, *синкопированный* и *символьный*. Первый этап характеризуется полным отсутствием каких-либо символов, за исключением, конечно, того, что сами слова используются в их символическом *смысле. Сегодня ритори*ческая алгебра используется, например, в такой формулировке: «от перемены мест слагаемых сумма не изменяется», что в символьном выражении может быть записано в виде: $a + b = b + a$.

Синкопированная алгебра, типичным примером которой является египетская алгебра, является дальнейшим развитием риторической. В ней определенные слова, которые часто используются, уже начинают сокращаться. В конце концов эти сокращения доходят до стадии, когда их происхождение уже забывается, так что между символом и операцией, которую он обозначает, уже нет очевидной связи. *Сокращение становится символом.*

Для примера мы можем рассмотреть историю символов «+» и «−». Последний символ в средневековой Европе долгое время обозначался полным словом *minus*, потом — первой буквой $\bar{m}$ с черточкой сверху. Наконец, сама буква исчезла и осталась только черточка. Аналогичные превращения произошли и со словом *plus*. В приведенной таблице читатель может ознакомиться с хронологической историей стандартных символов.

Греческая алгебра до Диофанта была по преимуществу риторической. Существует много объяснений тому, что греки так отставали в создании символов. Одна из наиболее современных теорий заключается в том, что буквы греческого алфавита также обозначали и цифры, и использование тех же самых букв для обозначения величин в общем виде, очевидно, могло бы привести к путанице. На это указывает тот факт, что Диофант воспользовался тем, что в греческом языке звук ζ (сигма) имел два написания: σ и ζ. Первый символ обозначал число 60, а второй не имел численного значения, поэтому Диофант выбрал его для обозначения неизвестного.

Хотя нельзя не отметить, что символ, который Диофант использовал для обозначения неизвестной величины, больше похож на сокращенное написание первого слога в слове *arithmos* — «число». Этим словом он обозначал неизвестное в задаче. Кроме того, эта теория, кажется, не учитывает тот факт, что только прописные буквы греческого алфавита использовались как числа. Значит, в распоряжении греков оставались еще заглавные буквы, которые они могли использовать и действительно использовали в качестве символов.

Но эти символы никогда не использовались как *действующие*, а только как *метки* для обозначения различных точек или элементов на геометрических чертежах. Такие же описательные символы мы используем и сегодня для обозначения разнообразных точек при геометрических построениях, и следует помнить, что мы унаследовали этот обычай от греков.

Нет! Мышление греков было принципиально не алгебраическим; оно было слишком конкретным. Абстрактные алгебраические операции над объектами, преднамеренно оторванными от их физического содержания, не могли прийти на ум тем, кто так активно интересовался самими объектами. *Символ — не простая формальность*, в нем заключена суть алгебры. Без символа любой объект является ощущением человека и отражает все фазы, через которые проходит восприятие этого объекта человеческими чувствами. Объект, замененный символом, становится абсолютной абстракцией, просто операндом, над которым выполняются определенные действия.

Мышление древних греков только начало преодолевать этот барьер конкретности, когда наступил период упадка. В эти дни заката эллинской культуры можно выделить двух человек. Оба они жили в третьем веке нашей эры, оба происходили из Александрии, оба сеяли семена новых теорий, которые настолько опережали свое время, что не могли быть поняты современниками, но предопределили развитие важнейших наук через несколько столетий. «Поризмы» Паппа предвосхитили *проективную геомет-*

рию, а теория Диофанта подготовила почву для современной теории уравнений.

Диофант был первым греческим математиком, который открыто признал, что дроби также являются числами. Он также был первым математиком, который систематизировал решение не только простых уравнений, но также квадратных и уравнений более высокого порядка. Несмотря на неэффективные символы и неэлегантные методы, которыми он пользовался, можно считать, что он подготовил условия для развития современной алгебры.

Но Диофант был последней вспышкой догорающей свечи. На западный мир опустилась долгая ночь средневековья. Семенам эллинской культуры было предопределено дать ростки на чужой почве.

Возможно, индусы переняли из греческой науки некоторые голые факты, но они не переняли критический подход, характерный для греков. Только глупцы глупо и самонадеянно пускаются в рискованное предприятие. Индусам не препятствовали стремления к логической строгости, у них не было и софистов, которые тормозили бы полет творческой фантазии. Они играли с числами и отношениями, с нулем и бесконечностью так же, как и со многими словами: слово *sunya*, например, которое обозначало пустоту и в конце концов превратилось в наш ноль, также использовалось для обозначения неизвестного.

Наивный формализм индусов сделал больше для развития алгебры, чем критическая строгость греков. Их синкопированная алгебра на самом деле была очень характерной. Символы были просто первыми слогами слов, обозначающих объекты или операции. Однако у них были символы не только для фундаментальных операций и равенства, но также и для отрицательных чисел. Более того, они разработали правила преобразования простых и квадратных уравнений.

Задачи, которые они решали, были достаточно простыми и вполне типичными для алгебры такого уровня. Далее приведены две цитаты из «Лилавати» – трактата по общим вопросам теологии, написанного в восьмом веке нашей эры:

«Из груды цветков лотоса одна треть, одна пятая и одна шестая части были принесены в жертву богам соответственно Шиве, Вишну и Солнцу. Одна четвертая часть была преподнесена Бхавани. Оставшиеся шесть цветков отдали многоуважаемому учителю. Ответьте мне быстро, сколько всего было цветков?..»

«Во время любовной игры порвали ожерелье. Треть жемчужин упали на землю, пятая часть осталась на ложе; одна шестая часть жемчуга была найдена девушкой, а одна десятая — ее возлюбленным. На нити осталось шесть жемчужин. Скажите, из скольких жемчужин состояло ожерелье?»

Индийские математики оказали очень слабое влияние непосредственно на Европу. Но нет никаких сомнений в том, что арабы переняли арифметику и алгебру от обладающих знаниями браминов, которых просвещенные халифы так либерально принимали при дворах в девятом и десятом веках. Мусульманская цивилизация в то время была смесью двух культур: восточной и эллинской. Большое количество классических литературных произведений, трудов по науке и философии с санскрита и греческого были переведены на арабский язык и жадно изучались арабскими учеными. Многие из этих переводов сохранились, и в наши дни представляют собой уникальный источник исторической информации. В связи с этим следует помнить, что богатейшая библиотека эллинской античности — Александрийская — дважды была разграблена или разрушена. Первый раз — христианскими *вандалами в* четвертом веке и затем мусульманскими фанатиками в седьмом. В результате такого разрушения большое количество древних манускриптов исчезло и было бы полностью потеряно для потомков, если бы не их арабские переводы.

Часто говорят, что арабской цивилизации было исторически предопределено сохранить эллинскую культуру в переходные века. Она превосходно с этой задачей справилась. Более того, она обогатила сокровища своим собственным блестящим вкладом. Среди множества великих математиков того времени следует упомянуть имя, известное любому культурному человеку: Омар Хайям. Автор четверостиший *рубаи* был придворным астрономом халифа. Хотя рубаи написаны на персидском языке, Омар Хайям также написал на арабском языке «Алгебру», в которой использовал все преимущества своего знания греческой геометрии и индийской алгебры для решения уравнений третьей и четвертой степеней. Его также можно считать создателем графических методов решений. Более того, есть основания полагать, что он предугадал открытые Ньютоном формулы бинома.

Несмотря на все это, арабы не продвинулись ни на йоту в символьной записи. Один из самых странных исторических парадоксов в истории математики состоит в том, что арабы переняли индийскую алгебру, но не сохранили их необычную и изящную синкопическую символьную запись. Даже наоборот, они вернулись к риторической алгебре греков и на некоторое время даже исключили символьную запись чисел из своих трактатов по алгебре, полностью отдав предпочтение числам. Возможно, арабы до такой степени считали себя преемниками эллинов, что отвергали знания, приобретению которых были обязаны браминам?

Пока мусульманская культура приближалась к точке своего наивысшего подъема, Европа находилась в глубокой спячке. Замечательная картина этих темных веков и последующего переходного периода приведена великим математиком Якоби в выступлении, посвященном Декарту:

«Полночь истории, по нашим оценкам, приходится примерно на 1000 год до н.э, когда человечество утратило искусства и науки и даже память. Последние сумерки язычества прошли, однако новый день еще не наступил. Если что-то и осталось от культуры во всем мире, то только у сарацин, и Папа Римский, страстно жаждущий учиться, скрывая имя, обучался в их университетах и так стал чудом Запада. Наконец, христианский мир, уставший от молитв мертвым костям мучеников, собрался у могилы Спасителя только для того, чтобы обнаружить, что могила пуста и что Христос воскрес из мертвых. В ту пору и человечество воскресло из мертвых. Оно вернулось к деятельной и деловой жизни; это было лихорадочное возрождение искусств и ремесел. Города расцвели, появились новые граждане. Чимабуэ заново открыл угасшее искусство живописи, а Данте – поэзии. Тогда же такие великие и бесстрашные личности, как Абеляр и Святой Фома Аквинский, осмелились ввести в католицизм Аристотелеву логику и таким образом заложили основы схоластической философии. Но после того как Церковь взяла науки под свое крыло, она потребовала, чтобы формы, в которых они развивались, подчинялись бы такой же безусловной вере в авторитет, как и в ее собственные законы. И так случилось, что схоластика не только не освободила человеческий дух, но сковала его на многие последующие столетия, так что сама возможность свободного научного поиска подвергалась сомнению. Однако дневной свет, наконец, пробился, и человечество, заново обретя уверенность, решило воспользоваться преимуществами своих дарований и создать знание о природе, основанное на независимой мысли. Рассвет этого дня в истории называется Ренессансом, или Возрождением Знания».

Накопление культурных ценностей, очевидно, не входило в цели крестоносцев. Однако именно это они сделали. В течение трех веков христиане пытались силой оружия насадить свою «культуру» в мусульманском мире. Однако в результате превосходящая культура арабов начала медленно, но верно проникать в Европу. Арабы, живущие в Испании, и арабы из Леванта способствовали возрождению интереса к наукам в Европе.

Начался этот процесс в Италии. Первая значительная работа в математике была выполнена Фибоначчи, человеком выдающихся способностей. Его интуиция и предвидение далеко опережали тринадцатый век, в котором он жил. Купец по роду занятий, он много путешествовал по Ближнему Востоку и перенимал арабские знания этого периода. Он также был хорошо знаком с греческой математической литературой. Его вклад в алгебру и геометрию сформировал основу для развития математики в Италии в течение следующих трех столетий. Но об этом я расскажу в следующей главе.

Поворотным моментом в истории алгебры стала работа, написанная в конце шестнадцатого века французом Виетом, который подписывался на латыни именем Franciscus Vieta. Его великое достижение сегодня нам кажется довольно простым. Оно сформулировано в следующем отрывке из его работы:

«Нам поможет нововведение, которое позволяет отличать заданные величины от неизвестных или искомых посредством буквенной системы обозначений, постоянной по своей сути и простой для понимания, заключающейся, например, в том, чтобы обозначать искомые величины A или другими гласными E, I, O, U, Y, а заданные величины обозначать B, D, G или другими согласными».

Такой способ обозначения гласными-согласными просуществовал недолго. Уже через полстолетия после смерти Виета появилась геометрия Декарта, в которой первые буквы алфавита использовались для обозначения известных величин, а последние — для неизвестных. Система обозначений Декарта не только вытеснила, предложенную Виетом, но и дожила до наших дней.

Хотя немногие предложения Виета воплотились по букве, но они были восприняты по духу. Систематическое использование букв для обозначения неопределенных, но постоянных величин, «Logistica Speciosa», как он сам называл это, сыгравшее решающую роль в развитии математики, было величайшим достижением Виета.

Непрофессионалу трудно оценить истинную заслугу Виета. Является ли буквенная система обозначений в конечном итоге простой формальностью, просто удобной формой записи в лучшем случае? Нет сомнений, что запись вида

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

является более экономной; но обозначает ли она нечто большее, чем словесная формулировка этого тождества: квадрат суммы двух чисел равен сумме квадратов этих чисел плюс удвоенное их произведение?

Буквенную систему обозначений постигла судьба всех чрезвычайно удачных новшеств. Из-за ее универсального использования трудно представить себе время, когда в ходу была другая форма записи. Сегодня формула, в которой буквами обозначены общие величины, почти так же обычна, как и простой текст. Наша способность оперировать с символами расценивается как естественное качество образованного человека. Но это естественно только потому, что стало повседневной привычкой нашего разума. Во времена Виета такая запись означала радикальный отход от многовековых традиций. Как мы можем считать естественным механизм, который ускользнул от великого Диофанта и его проницательных арабских последователей? И даже гениальный Фибоначчи подошел к самому краю этого открытия, но все же не сделал его!

Есть удивительная аналогия между историей алгебры и арифметики. Там мы видели, как люди тысячи лет боролись с неподходящей системой счисления из-за того, что не было символа для нуля. Здесь отсутствие общей системы обозначений превращало алгебру в бессистемный набор правил для решения числовых уравнений. Точно так же как изобретение нуля позволило создать современную арифметику, так и появление системы буквенных обозначений ознаменовало новую эру в алгебре.

В чем же мощь этой системы обозначений?

Во-первых, буквенная запись освободила алгебру от зависимости от слов. И я имею в виду не только то, что без буквенной записи любое утверждение становится просто потоком слов, которые могут быть двусмысленно или неправильно истолкованы, как и любые слова. Это, конечно, важно; но еще более важно, что буквенная запись свободна от ограничений, которыми связаны веками использовавшиеся слова. Слова *arithmos* для Диофанта или *res* для Фибоначчи означали заранее определенное понятие: целое число. Но *A* для Виета или, в нашем представлении, *x* существует независимо от конкретного объекта, который обозначается этим символом. У символа есть значение, которое выходит за рамки обозначаемого объекта — вот почему *это не простая формальность.*

Во-вторых, над буквами можно проводить операции, что позволяет преобразовывать буквенные выражения и, следовательно, представлять любое утверждение множеством эквивалентных формул. Эта возможность преобразований *поднимает алгебру на более высокий уровень, чем просто удобная форма записи.*

До того как появилась буквенная система обозначений, можно было рассуждать только о конкретных выражениях; у каждого выражения, такого как $2x + 3$, $3x - 5$, $x^2 + 4x + 7$, $3x^2 - 4x + 5$, была своя особенность, и к нему нужен был свой подход. Буквенная система позволила перейти от частного к общему, от понятия «некоторый» к понятиям «любой» и «все». Линейная форма $ax + b$ или квадратичная запись $ax^2 + bx + c$ — теперь каждая из этих форм рассматривается как один вид. Благодаря этому стало возможным появление общей теории функций, являющейся основой всей прикладной математики.

Но наиболее важный вклад этого метода записи, и именно тот, который больше всего интересует нас в рамках этой книги, заключается в той роли, которую он сыграл при формировании общей концепции числа.

Оперируя с численными уравнениями, такими как

$$\text{(I)}\ \begin{aligned} x + 4 &= 6 \\ 2x &= 8 \\ x^2 &= 9 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(II)}\ \begin{aligned} x + 6 &= 4 \\ 2x &= 5 \\ x^2 &= 7, \end{aligned}$$

можно было довольствоваться утверждениями (как и поступали многие средневековые математики), что первая группа уравнений имеет решение, а вторая нет.

Но если теперь человек рассматривает уравнения такого же типа, но в буквенном представлении:

$$x + b = a$$
$$bx = a$$
$$x^n = b,$$

то полная неопределенность данных заставляет предложить решение в *общем виде*, то есть *в символах*:

$$x = a - b$$
$$x = a/b$$
$$x = \sqrt[n]{a}.$$

После этого уже напрасно ставить условия и говорить, что выражение $a - b$ имеет смысл только когда a больше b; a/b бессмысленно, если a не является делителем a; и что $\sqrt[n]{a}$ не является числом, за исключением тех случаев, кода a равно n-й степени целого числа. Сам факт описания *бессмысленности* придает ей смысл; не легко отвергать существование чего-то, что уже получило название.

Более того, с оговоркой, что $a > b$, b является делителем a и a равно n-й степени целого числа, можно определить правила работы с таким выражениями, как $a - b$, a/b, $\sqrt[n]{a}$. Но рано или поздно тот факт, что в самих этих символах нет ничего, что бы указывало на допустимость или недопустимость операций над ними, заставляет предположить, что нет противоречия в том, чтобы выполнять операции над символами как *если бы они были настоящими числами*. И после этого остается лишь один шаг до признания того, что эти символы *и есть числа*.

Вот в общих чертах история ранней алгебры или, точнее, той ее фазы, которая привела к общей концепции чисел. Здесь мы закончим исторический экскурс по двум причинам. Прежде всего, после Виета математика начала так стремительно развиваться, что в рамках одной книги нельзя охватить все, что было сделано. Кроме того, это развитие мало влияло на становление науки о числах, до тех пор пока прогресс ограничивался только техникой вычислений.

Что отличает современную арифметику от той науки, которая существовала до Виета? Изменившееся отношение к понятию «невозможно». Вплоть до семнадцатого века алгебраисты придавали этому термину абсолютное значение. Полагая натуральные числа единственной областью всех арифметических операций, они рассматривали возможность, или ограниченную возможность, как свойство, присущее этим операциям.

Таким образом, они считали, что *прямые* арифметические операции: сложение ($a + b$), умножение (ab), возведение в степень (a^b) являются возможными всегда, тогда как обратные операции: вычитание ($a - b$), деление (a/b) и извлечение корня ($\sqrt[b]{a}$) возможны только при определенных жестких условиях. До Виета математики удовлетворялись формулировкой этих фактов, поскольку более тщательный анализ проблемы был невозможен.

Сегодня мы знаем, что понятия как возможности, так и невозможности имеют только относительный смысл; они относятся не к свойствам операции как таковой, а только *к ограничению,* *которое человек традиционно накладывал на область определения операндов.* Если убрать этот барьер и расширить область, то невозможное станет возможным.

Прямые арифметические операции возможны всегда, так как они являются не чем иным, как последовательностью *итераций*, пошаговым проникновением вглубь последовательности натуральных чисел, которая *априори* предполагается бесконечной. Если снять это предположение и ограничить поле операндов некоторым конечным набором (например, первыми 1000 числами), то такие операции, как 925 + 125 или 67 × 15 станут невозможными, а соответствующие выражения — бессмысленными.

Или, например, ограничим поле только нечетными числами. Тогда умножение все же будет возможно всегда, поскольку произведение двух любых нечетных чисел является нечетным. Однако при так ограниченном поле сложение станет вообще невозможной операцией, поскольку сумма любых двух нечетных чисел никогда не будет нечетным числом.

Далее, если мы ограничимся только рассмотрением *простых* чисел, то операция умножения будет невозможной, так как произведение двух простых чисел не будет простым числом. Сложение будет возможно только в тех редких случаях, когда одним из слагаемых является число 2, а другим — меньшее из пары простых чисел, разность между которыми равна 2, например 2 + 11 = 13.

Можно приводить еще много примеров, но даже этих немногих достаточно, чтобы показать относительную природу таких слов, как возможность, невозможность и бессмысленность. И поскольку относительность признана, естественно задать вопрос: можно ли так расширить ограниченное поле, чтобы обратные арифметические операции, так же как и прямые, были всегда возможны?

Чтобы достичь этого по отношению к вычитанию, достаточно *добавить к последовательности натуральных чисел ноль и отрицательные целые числа.* Такой набор чисел называется *полем целых чисел.*

Аналогичным образом добавление положительных и отрицательных *дробей* к полю целых чисел делает всегда возможной операцию деления.

Созданная таким образом совокупность целых чисел и дробей, как положительных, так и отрицательных, вместе с нулем составляет *область рациональных чисел.* Она вытеснила область натуральных чисел, свойственную целочисленной арифметике. Четыре фундаментальные операции, которые раньше выполнялись только над целыми числами, теперь *по аналогии* были расширены для обобщенной совокупности чисел.

И при этом не возникает противоречий. Более того, за единственным исключением, которое мы обсудим далее, *сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел также являются рациональными числами.* Этот очень важный факт часто формулируют следующим образом: область рациональных чисел является *замкнутой* по отношению к четырем фундаментальным операциям арифметики.

Единственным, но очень важным исключением является деление на ноль. Это соответствует решению уравнения $x \cdot 0 = a$. Если $a \neq 0$, то уравнение *неразрешимо*, так как при определении нуля мы были вынуждены принять следующее тождество: $a \cdot 0 = 0$. Следовательно, не существует рационального числа, удовлетворяющего уравнению $x \cdot 0 = a$.

Наоборот, уравнению $x \cdot 0 = 0$ удовлетворяет любое рациональное значение x. Следовательно, x здесь — неопределенная величина. Чтобы при решении задач, приводящих к таким уравнениям, получать дополнительную информацию, мы должны рассматривать выражение $0/0$ как символ *любого* рационального числа, а выражение $a/0$ как символ того, что рациональное число не существует.

Хотя эти рассуждения могут показаться слишком скрупулезными, выраженные в символах они сводятся к следующему лаконичному утверждению: если a, b и c — любые рациональные числа и $a \neq 0$, то всегда существует *единственное* рациональное число x, удовлетворяющее уравнению

$$ax + b = c.$$

Это уравнение называется *линейным*, и оно является самым простым из множества типов уравнений. После линейных уравнений идут квадратные, затем кубические, уравнения четвертой, пятой степени и вообще *алгебраические* уравнения любой степени в общем виде, где под степенью понимается наибольшая степень, в которую возводится неизвестная величина x:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0.$$

Но и этим не исчерпывается все бесконечное разнообразие уравнений; *степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, уравнения кругового, эллиптического типа* и многие другие составляют обширный класс, который определяют всеобъемлющим термином *трансцендентные.*

Достаточно ли рациональных чисел для всего этого бесконечного разнообразия? В следующей главе мы увидим, что ответ на этот вопрос отрицательный. Следует ожидать, что область чисел будет расширяться и расширяться. Но эти расширения не являются произвольными; в самом механизме общей схемы их появления скрыта направляющая и объединяющая идея.

Иногда эту идею называют *принципом постоянства*. Впервые его четко сформулировал немецкий математик Герман Ганкель в 1867 году. Но зародыш этой идеи уже содержится в трудах сэра Вильяма Роуана Гамильтона, одного из самых оригинальных и плодотворных мыслителей девятнадцатого века.

Я сформулирую этот принцип в виде определения:

Бесконечная совокупность символов будет называться *полем*, а каждый его элемент *числом*, если:

Первое: среди элементов этой совокупности можно обнаружить последовательность *натуральных чисел*.

Второе: можно установить критерий сравнения, позволяющий сказать, равны ли два произвольно выбранных элемента, и если не равны, то какой из них больше. Этот критерий должен сводиться к натуральному критерию, если оба элемента являются *натуральными числами*.

Третье: для любых двух любых элементов совокупности может быть предложена схема операций *сложения* и *умножения*, которые будут обладать свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, как и операции над натуральными числами с теми же названиями, и которые сведутся к натуральным операциям при выполнении действий с натуральными числами.

Но эти очень общие рассуждения оставляют открытым вопрос о том, как принцип постоянства работает в частных случаях. Гамильтон указал метод, который сам называл *составлением алгебраических пар*. Давайте рассмотрим этот метод в применении к рациональным числам.

Если a кратно b, тогда обозначение a/b указывает на операцию деления a на b. То есть $9/3 = 3$ означает, что частное этого деления равно 3. Итак, пусть нам даны две таким образом обозначенные операции. Существует ли способ, не выполняя в действительности операции, узнать, будут ли результаты равны и если нет, то какой из них будет больше? Да; мы получим следующее:

$$\text{Критерий сравнения } \begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ если } ad=bc \\ \frac{a}{b}>\frac{c}{d}, \text{ если } ad>bc \\ \frac{a}{b}<\frac{c}{d}, \text{ если } ad<bc \end{cases}$$

И мы можем пойти даже дальше: разработать правила, как, не выполняя операции, обращаться с обозначенными величинами:

$$\text{Сложение: } \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

$$\text{Умножение: } \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Теперь давайте не будем ставить условие, что b является множителем a, и будем рассматривать a/b как символ нового поля математических сущностей. Такая символическая сущность зависит от двух целых чисел a и b, записанных в определенном порядке. К совокупности таких *пар* мы можем *применить* критерий сравнения, упомянутый выше, т.е. можно утверждать, например:

$$\frac{20}{15}=\frac{16}{12}, \text{ так как } 20 \times 12 = 15 \times 16.$$

$$\frac{4}{3}>\frac{5}{4}, \text{ так как } 4 \times 4 > 5 \times 3.$$

Определим операции над этими парами в соответствии с правилами, приведенными ранее, справедливыми для случая, когда b является множителем a и c является множителем d. Например, можно утверждать, что:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{(2\times5)+(4\times3)}{3\times5}=\frac{22}{15}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15}.$$

Таким образом, мы удовлетворили всем условиям принципа постоянства:

1. Новое поле содержит натуральные числа как подмножество, поскольку любое натуральное число может быть записано в виде пары:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \ldots$$

2. Для этого нового поля определен критерий сравнения, который сводится к натуральному критерию, когда a/b и c/d являются натуральными числами.
3. Для этого поля также определены две операции, обладающие всеми свойствами сложения и умножения, и эти операции сводятся к обычному сложению и умножению, когда a/b и c/d являются натуральными числами.

Значит, эти новые сущности удовлетворяют всем условиям принципа постоянства. Они доказали свое право присоединиться к натуральным числам, право именоваться *числами*. И вслед за тем как эти числа были признаны, поле чисел, включающее и старые и новые числа, получило название *рациональная область чисел*.

На первый взгляд кажется, что принцип постоянства оставляет настолько широкую свободу в выборе операций, что теоретическое определение числа в общем виде становится чрезмерно общим, чтобы иметь практическое значение. Однако условия, что поле должно содержать в себе натуральный ряд и что фундаментальные операции должны обладать свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (как и операции над натуральными числами), налагают такие ограничения, что, как мы увидим далее, удовлетворить им может только вполне конкретное поле.

Позицию арифметики в соответствии со сформулированным принципом постоянства можно сравнить с политикой государства, стремящегося к экспансии, но желающего сохранить фундаментальные законы, на которых выросло. Эти две разные цели: экспансия, с одной стороны, и желание сохранить однородность — с другой, естественно, повлияют на правила приема новых стран в союз.

Следовательно, первый пункт принципа постоянства соответствует утверждению, что государство-ядро *задает тон* всему союзу. Далее, поскольку первоначальное государство было олигархией, в которой каждый гражданин занимал определенное положение, это требование относится и к новым государствам. Требование соответствует второму пункту принципа постоянства.

Наконец, оговорено условие, что законы, связывающие граждан каждого отдельного государства, допущенного в союз, должны быть такими, чтобы допускать беспрепятственное установление отношений между гражданами этого государства и гражданами первоначального государства.

Конечно, читателю не следует воспринимать эту аналогию буквально. Она должна лишь способствовать возникновению мысленных ассоциаций с более привычной областью, чтобы принцип постоянства утратил свою кажущуюся надуманность.

Наши рассуждения, которые привели к построению области рациональных чисел, были первыми шагами в историческом процессе, который получил название *арифметизация математики*. Целью этого движения, начавшегося с Вейерштрасса в 60-е годы XIX века, было отделение чисто математических понятий, таких как *число*, *соответствие*, *множество*, от интуитивных идей, которые появились в математике в результате длительного влияния геометрии и механики.

Эти идеи, по мнению *формалистов*, так глубоко и прочно укоренились в математическом мышлении, что несмотря на аккуратность и осмотрительность в выборе слов значение, скрытое за этими словами, может повлиять на наши рассуждения. Проблема человеческих слов заключается в том, что они *обладают содержанием*, тогда как целью математики является построение чистых форм мысли.

Но как обойтись без использования человеческого языка? Ответ можно найти в слове *символ*. Только используя язык символов, еще незамутненный такими неопределенными понятиями, как *пространство*, *время*, *непрерывность*, берущими свое начало в интуиции и затмевающими чистый разум, – только так можно построить математику на прочной основе логики.

В этом и заключалась позиция школы, основанной итальянским математиком Пеано. Более поздними ее представителями являются Бертран Рассел и Уайтхед. В их фундаментальном труде «Principa Matematica» сделана попытка перестроить все основы современной математики, начав с совершенно четких предположений и продолжив, опираясь на принципы строгой логики. Использование точных символов не оставляет места для двусмысленностей, которые неотделимы от человеческого языка.

Эта книга на протяжении долгого времени оставалась памятником тяжелого труда и прекрасных намерений. Удалось ли авторам возвести структуру, основанную на чистой мысли, незапятнанную интуицией? Ответ на этот вопрос находится не в моей компетенции, и я никогда не встречал математика, прочитавшего все три тома этой книги. Среди математиков бытует мнение, что только два человека прочитали всю книгу от корки до корки. Но я не могу сказать определенно, входят ли сами авторы в эту категорию.

Признаюсь, что мне не симпатично такое крайнее стремление к символизму, которое провозглашает школа Пеано-Рассела; я не приобрел вкуса к методам символической логики; мои повторяющиеся попытки овладеть их запутанным символизмом неизменно приводили к безнадежной путанице и безысходности. Моя собственная неспособность понять, несомненно, повлияла на мое мнение – важная причина не выставлять здесь напоказ свои предубеждения.

Но я уверен, что эти предубеждения не стали причиной моей недооценки роли математического символизма. Для меня громадная важность математического символизма заключается не в этих бесплодных попытках изгнать интуицию из области человеческого мышления, но в безграничной мощи, позволяющей *помочь интуиции* в создании новых форм мышления.

Чтобы осознать это, не обязательно овладевать изощренной техникой символизма в современной математике. Достаточно поразмышлять над более простым, но намного более утонченным символизмом языка. Поскольку в нашем языке возможны точные формулировки, он представляет собой систему символов, характерный пример риторической алгебры. Существительные и фразы – это просто классы объектов, глаголы обозначают отношения, а предложения – это просто теоремы этих классов. Но хотя слово и является абстрактным символом класса, в нем также заложена способность *вызывать к жизни образы*, конкретные картины некоторых характерных элементов класса. В этой двойственной функции нашего языка можно найти начало конфликта, который позже возник между логикой и интуицией.

И то, что верно для слов вообще, верно в частности и для тех слов, которыми представлены *натуральные* числа. Поскольку они способны создавать в нашем сознании образы конкретных совокупностей, нам кажется, что они настолько глубоко проникли в нашу жизнь, что их сущность является *абсолютной*. Хотя в том смысле, в котором они используются в арифметике, они являются всего лишь набором абстрактных символов, над которыми определены некоторые операции.

После того как мы осознали символическую природу натуральных чисел, они потеряли свой абсолютный характер. Присущая им схожесть с более широкой областью, в которой они являются ядром, становится очевидной. В то же время последовательное расширение понятия числа является шагом на неизбежном пути естественной эволюции, а не искусственным и произвольным мошенничеством, как это могло показаться вначале.

ГЛАВА 6

НЕВЫРАЗИМОЕ

> Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека.
>
> *Леопольд Кронекер*

Число управляло вселенной пифагорейцев.

Но не число в современном смысле этого слова — тогда это было натуральное число, целое, которое царствовало безраздельно. Но и пифагорейская вселенная — это не наша вселенная, вселенная, которая превосходит чувственное восприятие, которая раскрывается так полно, даже если и таинственно, в многочисленных открытиях, ставших важной составляющей в нашей повседневной жизни. Вселенная греков была ограничена вещами, непосредственно доступными чувствам.

В гармонии звуков пифагорейцы видели подтверждение своей философии чисел. Гармония зрительных образов и осязания находила высочайшее выражение в совершенных геометрических фигурах: круге и сфере, правильных многоугольниках и совершенных трехмерных телах, тех элементах, которые Великий Зодчий использовал при сотворении мира. И здесь, как и ожидалось, число властвовало безраздельно.

«Точка — это единица в определенном месте» — вот фундамент геометрии Пифагора. Но за этим цветистым словесным утверждением скрывается наивная идея, что прямая состоит из последовательности атомов так же, как ожерелье — из отдельных жемчужин. Причем эти атомы так чрезвычайно малы, что все вещество однородно, и так одинаковы по размеру, что можно взять их в качестве элементарной единицы меры. Таким образом, если даны любые два отрезка, отношение их длин равно просто отношению количества атомов в каждом из них.

Естественно, это же верно и для сторон любого треугольника, в частности прямоугольного. Из Египта пифагорейцы позаимствовали «золотой» треугольник с соотношением сторон 3 : 4 : 5. Вскоре после этого были открыты другие «пифагорейские» треугольники, такие как 5 : 12 : 13 и 8 : 15 : 17. Убеждение, что все треугольники были *рациональными*, с удовлетворением подтверждалось. То, что некоторые треугольники, фактически большая их часть, не укладывались в такие совершенные соотношения, в целом не являлось удивительным. В конце концов, соотношения могли выражаться в очень больших числах, а техника вычислений у греков была достаточно примитивной.

Так обстояли дела некоторое время.

Размышление над природой таких треугольников привело к фундаментальному открытию, которое до наших дней носит имя Пифагора и является одной из основных теорем классической геометрии. Звучит она так: В любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов, построенных на катетах, равна квадрату, построенному на гипотенузе. Согласно легенде, теорема была открыта самим Пифагором, который был так потрясен ее изяществом, что принес в жертву богам быка. Как эту легенду можно примирить с практически достоверно установленным фактом, что Пифагор был строгим вегетарианцем? Пусть этот вопрос останется читателю.

Сомнительно, что Пифагор вывел эту теорему в результате *дедуктивных рассуждений*. Более вероятно, что она получена эмпирически. То, что у него имелось строгое доказательство этой теоремы, также маловероятно. Но нет никаких сомнений в том, что и он, и его ученики придавали большое значение этой теореме; в ней они видели *проявление единства присущего геометрии и арифметике*, новое подтверждение своего лозунга: «Число управляет вселенной».

Но триумф длился недолго. В самом деле, одним из непосредственных следствий этой теоремы было следующее открытие: *диагональ квадрата несоизмерима с его стороной*. Кто первым установил это и как это случилось, вероятно, навсегда останется тайной. Великолепное доказательство Евклида, приведенное ниже, очевидно является развитием более грубого метода. Но кто бы это ни открыл, нет никаких сомнений, что это стало причиной глубокого оцепенения в рядах пифагорейцев. Само название, данное этому открытию, свидетельствует об этом. *Alogon*, то есть *невыразимое*, — так назвали эту несоизмеримость последователи Пифагора; и они поклялись никогда не раскрывать факт ее существования посторонним. Неисчислимое несовершенство, обнаруженное в творении Зодчего, следовало хранить в глубочайшей тайне, чтобы Его гнев за то, что выставлено на показ, не обрушился на людей.

Прокл сказал:

«Говорят, что те, кто впервые извлек рассмотрение иррационального из сокровенности и предал его гласности, погибли в кораблекрушении, все до одного. Так как невысказываемое и безобразное должно постоянно оставаться сокровенным. А те, кто обнаружил и прикоснулся к этому образу, мгновенно погибли и останутся навеки игрушкой вечных волн».

Прошло меньше века, и секрет пифагорейцев стал достоянием всех мыслящих людей. О невыразимом стали говорить, то, о чем невозможно помыслить, стали облекать в слова, засекреченное предстало перед взором непосвященных. Человек попробовал запретный плод знания и был обречен на изгнание из пифагорейского числового рая.

Открытие иррациональных чисел ознаменовало конец учения Пифагора как системы натуральной философии. Идеальная гармония между арифметикой и геометрией, которой учил Пифагор, оказалась ложью: Как может господствовать во вселенной число, если оно не годится для объяснения даже самого простого аспекта вселенной, такого как геометрия?

Так закончилась первая попытка исчерпать вселенную числом.

Как и большинство классических доказательств, доказательство Евклида несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной построено по принципу *reduction ad absurum* (т.е. доказательство от противного). Оно только кажется геометрическим, но по своей сути основано на теории чисел. Говоря современным языком, примем каждую сторону квадрата равной единице, а диагональ обозначим как x. Теперь теорема Пифагора сводится к решению квадратного уравнения

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \text{ или } x^2 = 2. \qquad (1)$$

Если бы решением этого уравнения было рациональное число p/q, то диагональ и сторона были бы соизмеримы. Пусть это верно, и пусть дробь p/q является *несократимой*. Тогда одно из двух целых, p или q, должно быть нечетным. Покажем, что p не может быть нечетным. В самом деле, подставим p/q в уравнение (1) вместо x, тогда оно примет вид

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \text{ или } p^2 = 2q^2. \qquad (2)$$

Отсюда мы видим, что p^2 четно, значит и p тоже четно.

Поскольку p четно, мы можем представить его как: $p = 2r$, где r — другое неизвестное целое число. Подставляя это выражение в (2), получим

$$4r^2 = 2q^2 \text{ или } q^2 = 2\,r^2, \tag{3}$$

что аналогично уравнению (2). Но это означает, что целое число q также четно, что противоречит нашему предположению, что дробь p/q является далее несократимой; что, в свою очередь, показывает невозможность решения уравнения $x^2 = 2$ в рациональных числах.

Такое рассуждение является абсолютно общим. Слегка модифицировав, его можно применять к уравнениям

$$x^2 = 3,\ x^2 = 5,\ x^2 = 6$$
$$x^3 = 2,\ x^3 = 3,\ x^3 = 4$$

и, более того, к уравнению в общем виде

$$x^n = a.$$

Если a не является n-й степенью некоторого рационального числа, *уравнение* $x^n = a$ *не имеет* решения в рациональных числах.

В работах греческих геометров второго ряда, таких как Герон из Александрии или Теон из Смирны, мы находим приближенные значения иррациональных чисел $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ и т.д. Однако нет никаких упоминаний о методе, при помощи которого эти значения были получены. Поскольку в большинстве случаев приближения были великолепными, те, кто занимается историей математики, дали волю своему воображению при реконструкции неизвестных методов. Таких теорий уже достаточно много. Некоторые приписывают греческим математикам знание бесконечных рядов; другие — непрерывных дробей. Я рискнул придумать свою собственную теорию, также умозрительную, однако имеющую по крайней мере то достоинство, что она не предполагает, будто бы греки были сведущи в современных методах.

Суть моей теории состоит в следующем: доказательство Евклида иррациональности числа $\sqrt{2}$ для *средних* греческих математиков было слишком причудливым, чтобы быть убедительным. Среди убежденных пифагорейцев могли быть такие «крепкие орешки», которые не теряли надежды найти рациональные значения $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ и т.д. Поиск таких рациональных значений шел по самому естественному пути. Число 2, к примеру, может быть представлено бесконечным *количеством* способов в виде рациональной дроби, знаменатель которой является полным квадратом:

$$\frac{2}{1} \approx \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{32}{16} = \frac{50}{25} = \frac{72}{36} = \frac{128}{64} = \frac{200}{100} = \cdots$$

Если $\sqrt{2}$ – рациональное число, то, продвинувшись достаточно далеко, в конце концов можно найти такую дробь, числитель которой также будет полным квадратом. Тут они, конечно, потерпели неудачу, но в качестве побочного результата – получили очень точную аппроксимацию. В самом деле

$$\frac{288}{144} = 2,$$

в то же время

$$\frac{289}{144} = \left(\frac{17}{12}\right)^2.$$

Теон приводит именно такую аппроксимацию $1^5/_{12}$, которая отличается от истинного значения менее чем на $^1/_7$ от 1%.

Я предлагаю это теорию вашему вниманию как вполне стоящую.

В геометрии есть огромное множество задач, в том числе достаточно простых, которые не позволяют найти *численное* решение, по крайней мере, если мы ограничим себя областью только рациональных чисел. Нахождение диагонали квадрата по его стороне – это только один пример. Ребенок, умеющий выполнять элементарные построения при помощи циркуля и линейки, может определить диагональ *геометрически*. Это же справедливо и для других задач, приводящих к квадратным, кубическим уравнениям, уравнениям более высоких степеней или даже к трансцендентным. При помощи *рациональной арифметики* их решить невозможно.

С другой стороны, иррациональные величины можно выразить через рациональные приближения с любой наперед заданной точностью. Метод описанный ранее в этом разделе является достаточно общим. Аналогичные методы: *алгоритм* извлечения квадратного корня, которому нас учат в школе, разложение в ряд или в непрерывную дробь. Существует еще множество других методов, к которым мы можем прибегнуть, когда встречаемся с задачей, не имеющей рационального решения. Обычно такие методы заключаются в «ограничении» иррационального числа двумя последовательностями рациональных чисел, члены одной из которых всегда меньше, чем иррациональное число, а другой больше. И, что наиболее важно, расстояние между этими рациональными приближениями может быть сколь угодно малым.

Чего же еще можно желать? Физик или инженер, то есть люди преимущественно практического склада, полностью удовлетворены. Что нужно физику от метода вычислений? Получить значение с такой степенью точности, которая позволит ему в полной мере использовать возрастающую точность его измерительного устройства. Тот факт, что определенная величина, как, например, $\sqrt{2}$, π или e, не может быть выражена *математически* посредством рациональных чисел, не заставит его мучаться бессонницей, поскольку математики предоставят ему рациональное приближение этих величин с любой требуемой точностью.

Математик смотрит на эту проблему по-другому, и вот по какой причине: он видит область рациональных чисел как *совокупность*, как *множество*. Он видит, что эта совокупность простирается от отрицательной бесконечности, через ноль и до положительной бесконечности. Это множество *упорядочено*, т.е. если даны любые два рациональные числа, можно сказать, какое из них больше. Между любыми двумя рациональными числами можно вставить третье независимо от того, насколько близко расположены первые два. На своем жаргоне он говорит об этом так: область рациональных чисел *всюду плотная*. Короче говоря, он видит множество рациональных чисел *компактным и непрерывным, без видимых пропусков*.

Математик считает хорошей аналогию между рациональными числами и точками на прямой. Здесь также множество точек распространяется бесконечно в обоих направлениях; также для любых двух точек можно сказать, которая из них правее. Компактность тоже сохраняется, т.е. между любыми двумя точками можно вставить третью независимо от того, насколько близко точки расположены. И эта аналогия представляется настолько полной, что кажется должен быть способ установить *соответствие между областью рациональных чисел, с одной стороны, и точками на прямой — с другой.*

Это соответствие является фундаментом *аналитической геометрии*. И даже те читатели, которые никогда ее не изучали, имеют общее представление об этой науке, благодаря тому что время от времени им приходилось строить графики. Итак я напомню им только, что схема заключается в определении на неограниченной прямой положительного и отрицательного *направлений*. Такая прямая, на которой заданы направления, называется *осью*. На ней нужно выбрать две точки: точку O, *начало отсчета,* которая представляет число ноль; и точку U, *единичную точку,* которая представляет 1. Положительные целые мы получим, откладывая вправо последовательность интервалов, равных OU по длине; и отрицательные – выполняя аналогичные действия влево. Разделив единичный отрезок на любое количество, кратное делителю, мы сможем представить также любую положительную или отрицательную дробь.

Таким образом, любое рациональное число может быть представлено точкой на оси. Сразу же возникает вопрос: верно ли обратное, т.е. можно ли каждой точке на оси поставить в соответствие некоторое рациональное число? Ответ категорический: нет! Объяснить это можно так: если построить квадрат со стороной, равной OU, и отложить на оси отрезок OD, равный диагонали квадрата, то точке D нельзя поставить в соответствие ни одно *рациональное число.*

Так значит, отсутствие пропусков было лишь иллюзией! Правда, что, если *все* рациональные числа *отображены* на ось, мы получим компактный ряд; но эти точки никоим образом не заполнят прямую: между ними останется бесконечное количество пропусков, которые не могут быть представлены рациональными числами. И как мы позже увидим, в некотором смысле можно утверждать, что *иррациональных пропусков намного больше, чем рациональных точек.*

С точки зрения чистого математика, фундаментальный факт заключается в следующем: Любому рациональному числу соответствует точка на оси, но это соответствие не является взаимным. На оси существуют точки, которым ни одно рациональное число не может быть присвоено. Таких точек не только бесконечно много, но бесконечно их многообразие, например, каждое из таких многообразий, как $\sqrt{a},\sqrt[3]{a},\ldots\sqrt[n]{a}$ и т.д., содержит в себе бесконечное количество иррациональных точек.

Итак, мы еще раз столкнулись с задачей расширения концепции числа. Нам необходимо раздвинуть область чисел далеко за пределы понятия рациональных чисел, поскольку рациональных чисел недостаточно даже для решения простейших квадратных уравнений.

Будет логично, если мы еще раз обратимся к принципу постоянства, который так прекрасно послужил раньше. Мы создали символ $\sqrt[n]{a}$. Этот символ представляет рациональное число, если уравнение $x^n = a$ имеет рациональное решение, т.е. a равно n-й степени рационального числа. Используя этот конкретный случай как исходную точку, установим правила операций над такими символами. Затем эти тождества используем как определяющие соотношения нового числового поля, поля элементарных *иррациональных чисел, радикалов*, обозначаемых как $\sqrt[n]{a}$. Благодаря механизму сведения к общему показателю степени, для них можно легко установить критерий сравнения. Например, если мы хотим сравнить $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$, мы запишем

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{8}; \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9}; \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$$

и мы получили неравенство $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

Умножение и деление также легко определить, используя тот же самый механизм. Произведение любых двух иррациональных чисел, опирающихся на рациональные числа, само по себе является сущностью того же типа. Например,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8 \times 9} = \sqrt[6]{72}.$$

Однако мы сталкиваемся с непреодолимой трудностью при сложении. Такое выражение, как $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, нельзя представить в виде $\sqrt[n]{a}$, где a — рациональное число. *Сумма двух элементарных иррациональных чисел в общем случае не является элементарным иррациональным числом.* Итак, поле простых иррациональных чисел «замкнуто» по отношению к умножению и делению, но оно «широко открыто» по отношению к сложению и вычитанию.

Чтобы построить непротиворечивую систему, мы вынуждены сразу же дополнить наше поле и кроме элементарных иррациональных чисел ввести *составные* вида $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Но прежде чем переходить к расширению, давайте взглянем, что же нас ожидает.

Нельзя забывать, что мы намеревались «решать» уравнения наиболее общего вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0,$$

где n — любое целое число, а коэффициенты — рациональные числа. До сих пор мы рассматривали только очень частный случай этого очень общего уравнения — *двучленное* уравнение

$$ax^n + b = 0.$$

Случай, когда $n = 1$, приводит нас в область рациональных чисел. В общем случае мы получим элементарные иррациональные числа. Но нас ведь интересовало уравнение в общем виде! Если бы оно сводилось к уравнению простейшего вида $x^n = A$, то его формальное решение приводило бы к элементарным иррациональным числам. Значит, фундаментальный вопрос заключается в том, можно ли любое алгебраическое уравнение свести к двучленному? Или, другими словами, *может ли быть формально выражено через радикалы решение алгебраического уравнения в общем виде?*

История этого вопроса является замечательным примером важности использования рассуждений по индукции.

Некоторые специальные типы квадратных уравнений можно найти в «Арифметике» Диофанта. Затем эту теорию начали развивать индийцы, которые в связи с этим установили правила работы с иррациональными числами почти в том виде, в котором мы знаем их сегодня. Полностью эта задача была решена арабскими математиками: было найдено, что формальное решение квадратного уравнения в общем виде $ax^2 + bx + c = 0$ выражается как $A + \sqrt{B}$, то есть его можно *выразить через рациональные числа и квадратичные радикалы.*

Затем арабы взялись за кубическое уравнение в общем виде $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, но особых успехов не добились. Омар Хайям предложил гениальное геометрическое решение, но его бесплодные попытки получить формальное алгебраическое решение привело его к мысли, что кубическое уравнение нельзя разрешить в радикалах. Этой проблемой были зачарованы итальянские математики эпохи Возрождения, и в шестнадцатом веке задача была ими полностью решена при обстоятельствах, о которых я расскажу где-нибудь еще. Они показали, что *общее решение кубического уравнения можно выразить через кубические и квадратичные радикалы.*

Практически одновременно итальянский математик Феррари смог свести уравнение четвертой степени к решению вспомогательных квадратного и кубического уравнений, из чего следовал вывод о том, что *уравнение четвертой степени может быть решено через радикалы, степень которых не превосходит четырех.*

Из этого следовал естественный вывод, что, по-видимому, и в общем случае уравнение степени *n* должно, *согласно прецеденту*, иметь формальное решение в радикалах и, вероятно, степени радикалов не будут превышать *n*. В этом действительно были убеждены большинство математиков восемнадцатого века; одним из наиболее известных исключений был Лагранж.

Проблема была решена только в начале девятнадцатого века. Как это часто случается в математике, чрезвычайная сложность задачи потребовала новых методов, и новые методы оказались намного более плодотворными и перспективными, чем нужно было просто для решения задачи. Фундаментальный вклад Руффини, Абеля и Галуа позволил не только полностью решить проблему, но и обогатил математику новым фундаментальным понятием *группы*.

Примечательно, что два таких непохожих по складу характера и мировоззрению человека, как Абель и Галуа, заинтересовались одной и той же проблемой и начали ее решать схожими методами. Оба они подходили к проблеме решения уравнения пятой степени с убеждением, что решение в радикалах возможно; Абелю тогда было восемнадцать лет, Галуа шестнадцать. Фактически, оба некоторое время думали, что нашли такое решение; оба скоро осознали ошибку и начали решать задачу новыми методами.

В 1825 году Абель окончательно доказал, что *уравнение пятой степени в общем виде неразрешимо только в радикалах.* Он предполагал, что это справедливо и для всех уравнений степени больше пятой. Это утверждение определенно доказал Галуа. В оставшихся после его смерти записях Галуа полностью ответил на вопрос, каким должно быть уравнение, чтобы его можно было разрешить в радикалах. Именно эта конкретная проблема привела к тому, что Галуа разработал новую теорию уравнений, которую обычно называют теорией групп Галуа. Однако рассмотрение этой теории не входит в нашу задачу. (Нильс Хенрик Абель прожил всего 27 лет (1802—1829), Эварист Галуа не дожил до 21 дня рождения (1811—1832). — *Прим. пер.*)

Чтобы подвести итог, заметим, что непосредственное применение принципа постоянства к проблеме иррациональных чисел невозможно по двум причинам. Во-первых, элементарные иррациональные числа вида $\sqrt[n]{a}$ не образуют замкнутого поля. Во-вторых, *составных* иррациональных чисел не достаточно для решения алгебраических уравнений общего вида *степени выше четырех.*

Чтобы создать всеобъемлющую теорию, необходимо рассмотреть полностью *алгебраическое* поле; поле, включающее в себя все *алгебраические* числа, т.е. решения всех возможных алгебраических уравнений. Такое поле, конечно, будет включать в себя область рациональных чисел. Более того, можно показать, что поле алгебраических чисел замкнуто не только по отношению к первым четырем фундаментальным операциям, но также и по отношению к извлечению корня, т.е. сумма, разность, произведение, частное, степени и иррациональные выражения любых двух алгебраических чисел также являются алгебраическими числами. Кроме того, если мы рассмотрим в наиболее общем виде уравнение n-й степени

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px + q = 0,$$

где *n* – целое число, но *a*, *b*, *c*, ... *p*, *q* уже не обязательно рациональные, а могут также быть алгебраическими числами наиболее общего вида, то, если такое уравнение вообще имеет решение, это *решение будет алгебраическим числом.*

Может быть, теория алгебраических чисел и всеобъемлющая, но в ней есть несколько серьезных изъянов. В первую очередь, необходимая символическая запись непрозрачна и громоздка, поскольку включает в себя все коэффициенты уравнения. Более того, операции с такими символами настолько сложны, что выполнить даже самые простые манипуляции почти нереально. Наконец, очень серьезная трудность заключается в том, что алгебраические уравнения степени выше первой имеют, как правило, *больше одного решения.*

Квадратное уравнение может иметь два решения, уравнение степени *n* может иметь вплоть до *n* различных решений. Неопределенность, присущая такой процедуре решения, является непреодолимым препятствием, особенно в приложении к задачам, где исходным предположением является *однозначность решения.*

Но задолго до того как движение к обобщению понятия числа в этом направлении набрало скорость, произошло событие, которое по своей важности затмевает даже открытия Абеля и Галуа. В 1844 году французский математик Жак Лиувилль, профессор «Эколь Нормаль» и основатель известного «Журнала чистой и прикладной математики», прочитал в Парижской Академии свою статью, которая позже была опубликована в его собственном журнале под названием «Об очень широком классе величин, которые не являются алгебраическими и не сводятся даже к иррациональным». В этой эпохальной работе Лиувилль показал, что есть числа, которые по самой своей природе не могут быть корнями какого-либо алгебраического уравнения, подтвердив таким образом подозрение Лежандра, которое тот высказывал еще в 1794 году.

Хотя многообразие алгебраических чисел может показаться достаточно широким, они всего лишь провинция более пространной области, намного более обширной, как показал спустя 50 лет Георг Кантор, который привел новое доказательство теоремы Лиувилля и заложил прочный фундамент теории *трансцендентных*, то есть не-алгебраических чисел. Об этом, однако, далее.

Странно, но эти трансцендентные числа на просто причудливый продукт математического воображения, блюдо, возбуждающее аппетит математиков к абстракциям. Вследствие изобретения исчисления появился класс величин, которые в следующем столетии начали играть важнейшую роль практически во всех областях анализа — это *логарифмы* и *тригонометрические соотношения*. Сегодня эти величины ежедневно используются инженерами всего мира и являются одним из самых мощных инструментов прикладной математики. Через 50 лет после доклада Лиувилля было определенно доказано, что большинство этих величин являются трансцендентными. Чтобы лучше это понять, обратимся к истории числа π.

«И сделал море литое, от края его до края его десять локтей, все круглое, вышиною в пять локтей; и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом».

(Хроники, IV, 2)

Это описание бассейна для священников в храме Соломона показывает нам, что древние евреи считали, что π — отношение длины окружности к ее диаметру — равняется трем. Это значение на 5% меньше истинной величины. Оценка египтян была гораздо точнее: в папирусе Ринда (1700 до н.э.) мы находим, что значение π равняется $3\frac{13}{81}$, или $\frac{256}{81}$, или $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, что превышает истинное значение менее чем на 1%.

Естественно, что эта величина была предметом размышлений греческих математиков с самых давних времен. Но на греческой почве проблема приобрела новый характер. Она заняла свое место среди знаменитых проблем античности, окутанных легендарным великолепием греческой мифологии.

Всего таких проблем было три: *удвоение куба*, *трисекция угла* и *квадратура круга*. Последняя задача по сути своей эквивалентна определению числа π, так как площадь круга единичного радиуса равна π квадратных единиц, и если число π можно выразить рационально, то весь вопрос сводится к построению квадрата с заданной площадью. Фактически, если бы египетская оценка была абсолютно точной, то площадь круга равнялась бы площади квадрата, построенного на $^8/_9$ его диаметра.

Вокруг этих трех задач выстроилась большая часть греческой геометрии. При попытке их решить греческие геометры открыли конические сечения и кривые высших порядков. Вероятно, они не подозревали, что решения, которое они ищут, не существует. Поэтому сложность и неподатливость этих задач только подстегивали их усилия и выводили на арену геометрии величайшие умы от Архимеда до Апполония из Перги.

Первые две задачи алгебраически эквивалентны решению относительно простых кубических уравнений: $x^3 - 2 = 0$ и $4x^3 - 3x - a = 0$, где a — это правильная дробь. Когда мы объявляем эти проблемы «неразрешимыми», употребляем ли мы это слово в том же смысле, как в арифметике, где неразрешимость была равносильна ограничениям, наложенным на возможную область?

Да! Неразрешимость этих классических задач была обусловлена ограничением, причем настолько старым, что оно считалось естественным, таким естественным, что в действительности его редко осознавали. Когда греки говорили о геометрическом построении, они имели в виду построение с помощью *циркуля и линейки*. Это были инструменты богов; все остальные способы были запрещены как недостойные размышлений философа. Что касается греческой философии, не надо забывать, что она была по преимуществу аристократической. Методы ремесленников, какими бы остроумными и элегантными они ни были, считались вульгарными и банальными; и на общее презрение были обречены те, кто использовал свои знания для получения прибыли. (Есть история о молодом аристократе, который пришел учиться в академию Евклида. Уже через несколько дней он был так потрясен абстрактной природой предметов, что спросил у своего учителя о том, какая практическая польза от всех этих рассуждений. Тогда учитель позвал раба и приказал: «Дай этому юноше медную монету, чтобы он мог получать прибыль от своих знаний».)

Такие задачи, решение которых можно найти при помощи только линейки, в наши дни называются *линейными*, так как, если выразить их алгебраически, они приводят к линейным уравнениям. А те задачи, в которых требуется еще и использование циркуля, алгебраически эквивалентны решению уравнений *второй степени*. Однако это не было известно до семнадцатого столетия нашей эры. А между тем эти две задачи многократно подвергались атакам со стороны самых блестящих умов и других, не столь блестящих. Даже в наши дни есть профессиональные «трисекторы», чей величайший недостаток заключается в том, что они не знают, что задача была ликвидирована еще триста лет назад.

Тот факт, что с помощью циркуля и линейки решаются геометрические задачи, сводящиеся к линейным или квадратичным уравнениям, еще не означает, что если задача приводит к уравнению более высокой степени, то она неразрешима этим способом. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим уравнение $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$. Левая часть этого уравнения представима в виде двух сомножителей $(x^2 - 1)(x^2 - 2)$, значит это уравнение *четвертой* степени в действительности разлагается на два квадратных уравнения. Если такое преобразование возможно, т.е. мы можем выделить из уравнения выражение более низкого порядка с *рациональными коэффициентами*, то мы говорим, что уравнение является *приводимым*.

Однако трудность в том, что кубические уравнения, которые получаются при удвоении куба и трисекции произвольного угла, являются *неприводимыми*. И задача, описываемая этими уравнениями, обречена быть *неразрешимой с помощью циркуля и линейки*.

Значит, тут мы имеем еще одно подтверждение относительной природы слова *невозможно*. Невозможность почти всегда является результатом ограничения; ограничения, настолько освященного традицией, что оно кажется наложенным самой природой. Устраните это ограничение, и невозможность исчезнет. Так же и здесь. Сегодня известно, что при помощи специальных рычажных механизмов, т.е. инструментов, состоящих из совокупности поворачивающихся вокруг осей жестких элементов, можно решить не только эти две задачи, но и вообще любую задачу, которая сводится к *алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами*.

Задача о квадратуре круга отличается от этих задач тем, что ее невозможно сформулировать в алгебраическом виде.

Попытки решить эту задачу вписаны в анналы математики, начиная с Пифагора. Архимед был первым, кто осознал, что сложность заключается в определении. Когда мы говорим о площади прямоугольника или треугольника, мы точно понимаем, о чем говорим; то же относится и к любому многоугольнику. Но что понимать под площадью фигуры, ограниченной кривой? Мы можем строить вписанные и описанные многоугольники и говорить, что получаем *верхний* и *нижний* пределы искомой площади; однако определить саму площадь, не привлекая *бесконечные процессы* и *пределы*, нельзя.

Позже мы увидим, что именно на этой задаче Архимед проверял мощь своего так называемого метода *исчерпывания*. Тут достаточно сказать, что, используя последовательность многоугольников, как вписанных, так и описанных, Архимед показал, что число π заключено между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$.

Спустя восемнадцать веков после Архимеда задача не сильно продвинулась к решению. Естественно, многие попробовали свои силы в решении задачи квадратуры круга, и было опубликовано множество предложенных ими способов, причем некоторые из них были весьма курьезными. Также было получено множество приблизительных значений, самым интересным из которых является $\sqrt{10}$, полученное, по-видимому, в Индии. Значение, очень близкое к полученному египтянами, часто использовалось в средние века. Также известно множество попыток улучшить границы, полученные Архимедом. Например, Виет, использовал многоугольник с 393 216 сторонами, чтобы получить значение π с точностью 10 десятичных знаков.

Однако изобретение бесконечных процессов *настолько* улучшило результаты вычислений, что о достижении Виета скоро забыли. Сегодня известно около 700 точных десятичных знаков числа π. Что касается практической ценности таких вычислений, предоставим слово американскому астроному Симону Ньюкомбу:

«Десяти знаков после запятой достаточно, чтобы вычислить длину окружности Земли с точностью до долей дюйма; тридцать знаков дают возможность вычислить длину окружности всей видимой вселенной с точностью, недоступной даже самому мощному микроскопу».

С точки зрения теоретика, возможное объяснение заключается в том, что такая работа свидетельствует об усовершенствовании методов современной математики. А может быть, это безнадежная попытка открыть некоторую закономерность в последовательности десятичных знаков, которая прольет свет на природу числа π.

В конце восемнадцатого века задача вошла в совершенно новую фазу. Ламберт показал, что *π не является рациональным числом*, а Лежандр доказал, что оно не может быть корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Это определенно доказывало *неразрешимость задачи о квадратуре круга*, уменьшив немного рвение энтузиастов. Характеризуя этих людей, можно сказать, что их невежественность сопоставима только с их склонностью к самообману.

Однако все еще оставалась возможность того, что *р* является алгебраическим числом. Если бы это было так, то задача о квадратуре круга, не разрешимая циркулем и линейкой, по крайней мере формально, поддавалась бы решению с помощью рычажного механизма. И хотя это не имело бы практического значения, но стало бы подобающей кульминацией тщетных усилий в течение двух тысяч лет.

Эта возможность была поставлена под сомнение, когда в 1873 году французский математик Шарль Эрмит доказал, что *число е* *является трансцендентным.* Внутренняя связь между числами *e* и *π* была известна давно, поэтому возобновились попытки доказать, что *π* также трансцендентное число. И действительно через девять лет это удалось немецкому математику Герману Линдеману. Следовательно, именно современный анализ ликвидировал проблему, над которой бились математики начиная с Фалеса.

Так закончилась вторая попытка исчерпать природу числом.

Открытие трансцендентных чисел доказательство того, что этот класс чисел шире и разнообразнее, чем иррациональные алгебраические числа, что этими числами выражаются наиболее фундаментальные константы в современной математике, — все это недвусмысленно показывало, что мощный алгебраический аппарат потерпел неудачу примерно там же, где и примитивные орудия рациональной арифметики двумя тысячами ранее. Обе неудачи имеют один и тот же источник: алгебра, как и рациональная арифметика, оперировала только с *конечными процессами.*

Теперь, как и раньше, бесконечность стала той скалой, о которую разбились надежды подвести более надежный фундамент под понятие число. Однако узаконить бесконечные процессы, *позволить этим фантастическим* иррациональным созданиям стать в один ряд с рациональными числами, — было так же дико для ригористов девятнадцатого века, как и для древних греков.

Среди прочих особенно выделялся Леопольд Кронекер, создатель современного *интуиционизма.* Он верно понял сложности, связанные с введением иррациональных чисел, и предложил изгнать их из математики. Указывая на абсолютную природу целых чисел, он придерживался мнения, что натуральная область и рациональная, которая непосредственно сводится к натуральной, являются единственным устойчивым фундаментом для всей математики.

«Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека» — этой замечательной фразой Кронекер запомнился потомкам. Эта фраза напоминает мне историю о благочестивой пожилой даме, возглавлявшей комитет по строительству новой церкви. Архитектор, представивший на рассмотрение проект, обнаружил, что она взялась за дело очень серьезно. Наиболее неистово она протестовала против цветных стекол, присутствовавших в проекте. Наконец, в отчаянии он спросил, на чем же основаны ее возражения против цветных стекол. «Я хочу, чтобы стекла были такими, какими их создал Бог!» — эмоционально ответила женщина.

ГЛАВА 7

ЭТОТ НЕУСТОЙЧИВЫЙ МИР

> Первым наивным впечатлением, производимым явлениями природы и материей, является впечатление чего-то непрерывного, континуального. Если мы имеем перед собою кусок металла или некоторый объем жидкости, то нам навязывается представление о том, что они неограниченно делимы, что сколь угодно малый кусок их опять-таки обладает теми же свойствами.
>
> *Давид Гильберт*

В математике все пути ведут в Грецию.

Здесь я собираюсь рассказать об эволюции понятия бесконечно малых величин. Место, где эта концепция окончательно сложилась, — Западная Европа и время — семнадцатое и восемнадцатое столетия, но когда я пытаюсь проследить зарождение этой идеи, я вижу другое место и другое время. Итак, мы снова возвращаемся в древнюю Грецию, в незабвенные дни Платона.

Проблема бесконечности, как и близко связанный с ней вопрос об иррациональности, выросла на греческой почве. Там же произошел и первый кризис, которых в ее истории было множество. Кризис случился во времена Платона, но не Платон был его инициатором. Также и другие ортодоксальные философы Греции никак не затрагивали этот вопрос. Кризис был вызван школой мыслителей, которых ведущие философы того времени презрительно называли софистами.

По-другому их также называли элеатами; так ортодоксальные философы заклеймили этих малопонятных людей, подразумевая, может быть, что их учения были так же нелепы и ничтожны, как родина их основных представителей, Парменида и Зенона. Элея была бедной греческой колонией на юге Италии, по словам Диогена Лаэртского, «город скромный и умеющий лишь воспитывать доблестных мужей». Хотя сегодня, оглядываясь назад, мы можем сказать, что Элею прославили в веках только лишь софисты.

«Аргументы Зенона из Элеи, — по словам Бертрана Рассела, — в той или иной форме затрагивают основания почти всех теорий пространства, времени и бесконечности, предлагавшихся с его времени до наших дней». Сегодня мы не знаем, были представлены эти «Аргументы» в процессе дискуссий или появились в виде отдельной книги. Возможно и так и так. Из диалога Платона «Парменид», одного из немногих имеющихся источников по этому неясному предмету, мы узнаем о визите в Афины Зенона вместе со своим учителем Парменидом. Там есть указание на их предыдущий визит, во время которого, оказывается, Зенон и представил свои «Аргументы». И когда его вновь о них спрашивают, Зенон отвечает:

«Поддерживая рассуждение моего учителя [под влиянием страсти к спорам], я в молодости и написал это сочинение, но, когда оно было написано, кто-то его у меня украл, так что мне не пришлось решать вопрос, следует ли его выпускать в свет или нет. [Таким образом, от тебя ускользнуло, Сократ,] что сочинение это подсказано юношеской любовью к спорам, а вовсе не честолюбием пожилого человека».

Как бы то ни было, мы знаем «Аргументы» только от Аристотеля. Смог философ из Стагира устоять перед искушением и не исказить аргументы своего умершего оппонента?

Интерпретация этих аргументов на современном языке достаточно сложна. Не из-за недостатка переводов — как раз наоборот; перед нами возникает *embarras du choix* — проблема выбора. Существует пара десятков переводов и сотни пересказов. А что касается интерпретаций, то никакой темный отрывок Священного Писания не удостаивался большего внимания. Каждая из интерпретаций отражает любимую теорию автора, и теорий почти так же много, как и авторов. Вот четыре аргумента Зенона, которые Аристотель приводит в своей «Физике»:

Аргумент первый, Дихотомия:

«Первое [рассуждение] — о несуществовании движения на том основании, что перемещающееся тело должно дойти до половины прежде, чем до конца».

Аргумент второй, Ахиллес и черепаха:

«Второе [рассуждение] — так называемый «Ахиллес»: оно состоит в том, что самое медленное [существо] никогда не сможет быть настигнуто в беге самым быстрым, ибо преследующему необходимо прежде прийти в место, откуда уже двинулось убегающее, так что более медленное всегда должно будет на какое-то [расстояние] опережать [преследующего]».

Аргумент третий, Стрела:

«Если всегда всякое [тело] покоится, когда оно находится в равном [себе месте], а перемещающееся [тело] в момент “теперь” всегда [находится в равном себе месте], то летящая стрела неподвижна».

Аргумент четвертый, Стадион:

«Четвертое [рассуждение] относится к равным предметам, движущимся по ристалищу с противоположных сторон мимо равных [неподвижных] предметов: одни [движутся] с конца ристалища, другие от середины, имея равную скорость, откуда, по его мнению, получается, что половина времени равна ее двойному количеству».

(Обычно это интерпретируют следующим образом: Речь идет о двух равных по длине колоннах людей, движущихся параллельно с равной скоростью в противоположных направлениях. Зенон утверждает, что время, за которое колонны пройдут друг мимо друга, составляет половину времени, нужного одному человеку, чтобы пройти мимо всей колонны. — *Прим. пер.*)

Те, кто склонен к метафизике, видят в «Аргументах» опровержение возможности движения. (Движенья нет, сказал мудрец брадатый, Другой смолчал и стал пред ним ходить, Сильнее он не мог бы возразить... А.С. Пушкин. — *Прим. пер.*) Другие, как историк Таннери, говорят, что Зенон не имел такого намерения. Напротив, он воспользовался неоспоримой реальностью движения, чтобы указать на вопиющие противоречия, присущие нашим представлениям о пространстве, времени и непрерывности. Близок к этой мысли и Анри Бергсон, который считает, что «противоречия, на которые указывает школа элеатов, касаются не столько самого движения как такового, как того искусственного преобразования движения, которое совершает наш разум».

С этой точки зрения, ценность «Аргументов» заключается именно в том, что они убедительно показывают положение, которое занимает математика в общей структуре человеческих знаний. «Аргументы» демонстрируют, что пространство, время и движение, воспринимаемые нашими органами чувств (или, в современном понимании, научными инструментами, расширяющими и дополняющими наши чувства), не полностью аналогичны математическим понятиям с теми же названиями. Вопросы, которые ставит Зенон, не встревожат математика, так как они не указывают на логическое противоречие, но лишь на полнейшую двусмысленность языка. Математик может избавиться от этих неоднозначностей, допуская, что мир символов, в котором он творит, не идентичен миру его чувств.

Таким образом, предполагаемые свойства прямой возникают по произволу геометра. Он сознательно не принимает во внимание толщину и ширину, сознательно полагает, что общая точка двух прямых, точка их пересечения, не имеет никаких размеров. Желая применить законы арифметики к этим геометрическим сущностям, он, как мы увидим, допускает обоснованность бесконечных процессов, среди которых бесконечная делимость отрезка, *дихотомия*, только один частный случай. Классическая геометрия является логическим следствием этих предположений, но сами предположения являются произвольными, в лучшем случае удобным домыслом. Математик может отвергнуть классические постулаты, один или сразу все, и заменить их на новый набор предположений. В частности, он может взять новые элементы: *полосу* и *площадь*, общую для двух полос, и, назвав эти элементы линиями и точками, построить новую геометрию, полностью отличающуюся от классического учения, но такую же непротиворечивую и, возможно, такую же плодотворную.

Но с практической точки зрения физика или инженера, не все такие системы являются в равной степени приемлемыми. Человеку практики требуется хотя бы видимость реальности. Он всегда работает с конкретными объектами и поэтому рассматривает математические термины не как символы или измышления, а как образ реальности. Система, приемлемая для математика в силу своей непротиворечивости, может показаться практику полной «противоречий», так как она не в полной мере отражает реальный мир.

Может показаться странным, но именно практиков в значительной степени касаются «Аргументы», подвергающие критике обоснованность применения математики к физической реальности. К счастью, практики редко интересуются «Аргументами».

Историческую важность «Аргументов» Зенона переоценить невозможно. Хотя бы потому, что они заставили греков сформировать новое отношение к понятию времени.

Что, по сути, говорит Зенон в своем первом аргументе? Бегущий человек, прежде чем достигнет своей цели, должен достичь середины пути, и на это потребуется *конечное* время. Также он должен сначала достичь половины оставшегося, и на это также потребуется *конечное* время. Теперь *то, что было сказано раньше, всегда можно повторить.* Перемещение бегуна по беговой дорожке состоит из бесконечного количество отрезков, и на преодоление каждого из них требуется *конечное* время. Но сумма бесконечного количества конечных интервалов бесконечна. Значит бегун никогда не достигнет своей цели.

Вот что говорит Аристотель по поводу первого аргумента:

«Время и пространство можно разделить на одни и те же, равные между собой промежутки. Поэтому ошибочно рассуждение Зенона, в котором предполагается, что невозможно пройти бесконечное множество предметов или коснуться каждого из них в конечное время. Ведь длина и время и вообще все непрерывное называются бесконечными в двояком смысле: или в отношении деления, или в отношении количества. И вот, бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в конечное время, а бесконечного в отношении деления — можно, так как само время бесконечно именно в таком смысле».

Таким образом, конечный вывод из первых двух аргументов (второй аргумент — это просто остроумный пересказ первого) заключается в том, что нельзя говорить о *дихотомии пространства,* не допуская вместе с тем *дихотомию времени.* Но именно это понять очень сложно! Делимость прямой представить себе легко: мы можем без труда реализовать это, разрезая палку или размечая прямую. Но «разметка времени» — это просто оборот речи: время — это то, над чем мы не можем экспериментировать; оно либо все в прошлом, либо все в будущем. Разделение времени на интервалы — просто действие разума греков, как и действие нашего разума.

Придание времени свойства бесконечной делимости эквивалентно представлению времени в виде геометрической прямой, отождествлению *длительности* и *протяженности.* Это первый шаг к *геометризации* механики. Таким образом, первый аргумент Зенона направлен против принципа, на котором построен четырехмерный мир современной теории относительности.

Настоящий удар наносят последние два аргумента, как будто Зенон предвидел способ защиты своих оппонентов и подготовился к нему. Четвертый аргумент, касающийся самой сути проблемы относительности, сейчас мы обсуждать не будем. Именно третий аргумент убедительно демонстрирует зияющую пропасть между движением, воспринимаемым нашими чувствами, и математическим вымыслом, скрывающимся под тем же названием.

Послушаем, какие контрдоказательства приводит сам Зенон: «Вы говорите, что раз пространство состоит из бесконечности соприкасающихся точек, то и время – это просто бесконечная совокупность соприкасающихся моментов. Прекрасно! Теперь рассмотрим стрелу в полете. В каждый момент времени ее конец занимает определенную точку на ее пути. Но раз она *занимает это положение*, значит, он должен *находиться в покое* в этом положении. Как некоторая точка может быть неподвижной и находиться в движении одновременно?»

Математик устраняет этот аргумент волевым решением. Движение? Ну и что, движение – это просто соответствие между положением и временем. Такое соответствие между переменными он называет *функцией*. Закон движения не что иное, как просто функция, которая является прототипом всех *непрерывных функций*. Ничем, по существу, не отличается случай, когда у нас есть цилиндр, наполненный газом и снабженный поршнем, который может свободно скользить внутри цилиндра. Каждому возможному положению поршня соответствует определенное давление внутри цилиндра. Чтобы получить значение давления, соответствующее какому-то положению, мы можем остановить поршень в этом положении и измерить давление.

Но точно ли это полная аналогия с движущимся телом? Можем ли мы остановить его в любой момент, не уничтожая само движение, которое мы наблюдаем? Конечно, нет! Что тогда мы подразумеваем под *движущимся телом, занимающим определенное положение в определенный момент времени*? Мы подразумеваем, что, хотя мы не можем представить себе физический способ остановить стрелу в полете, не прервав при этом сам полет, ничто не запрещает нам сделать это с помощью *действия разума*. Но единственная реальность, скрывающаяся за этим действием разума, заключается в том, что можно вообразить *другую* стрелу как неподвижную в этой точке и в этот момент времени.

Математическое движение – это ничего более как бесконечная последовательность состояний покоя, то есть математика сводит динамику к разделу статики. Принцип, с помощью которого можно выполнить этот переход, впервые был сформулирован д'Аламбером в восемнадцатом веке. Отождествление движения с последовательностью смежных состояний покоя, в каждом из которых движущееся тело находится в равновесии, на первый взгляд кажется абсурдным. Но движение, состоящее из состояний *неподвижности*, не более и не менее абсурдно, чем отрезок, состоящий из точек, *не имеющих длины*, или время, состоящее из моментов, *лишенных длительности.*

Значит, эта абстракция даже не каркас реального движения, воспринимаемого нашими чувствами. Когда мы видим летящий мяч, мы воспринимаем движение в целом, а не как последовательность бесконечно малых рывков. Но математическая прямая также не является истинным или хотя бы подходящим представлением проволоки. Человека так долго приучали использовать эти вымыслы, что он предпочитает заменять ими подлинные явления.

Последующее развитие греческой науки ясно показывает, насколько сильным было влияние кризиса, вызванного «Аргументами» Зенона, на математическую мысль греков.

С одной стороны, этот кризис ознаменовал начало эры софистики. Это была естественная реакция на безыскусное пустословие пифагорейцев, представлявшее собой странную смесь математических идей с религиозными лозунгами и неопределенными метафизическими рассуждениями. Какой резкий контраст с ними составляет чеканная строгость изложения в книге Евклида «Элементы», которая и в наши дни является эталоном в математических дисциплинах.

С другой стороны, «Аргументы» посеяли в умах греческих геометров страх бесконечности (*horror infiniti*), который частично парализовал их созидательное воображение. Бесконечное было под запретом, его следовало остерегаться во что бы то ни стало; а если уж избежать его не удалось, маскировать рассуждениями *от противного* и тому подобными. В таких условиях не только было невозможно создать позитивную теорию бесконечного, но даже и развитие бесконечных процессов, которое достигло некоторых успехов во времена, предшествовавшие Платону, было приостановлено.

В Древней Греции мы обнаруживаем сочетание самых благоприятных обстоятельств: ряд гениальных математиков, таких как Евдокс, Аристарх, Евклид, Архимед, Аполлоний, Диофант, Папп; замечательные традиции, которые поощряли созидательные усилия и теоретическую мысль и в то же время поддерживали критический дух, предохранявший исследователей от подвохов честолюбивого воображения; и наконец, социальная структура, наиболее благоприятная для развития праздного класса, обеспечивавшая постоянный приток мыслителей, которые могли посвятить себя поиску новых идей, не принимая во внимание непосредственную полезность. Действительно, такого стечения обстоятельств не превзойти, пожалуй, и в наши дни. Да, но греческие математики остановились на полуслове в алгебре несмотря на Диофанта; остановились в аналитической геометрии несмотря на Апполония; не продвинулись далеко в анализе бесконечно малых несмотря на Архимеда. Я уже показывал, как отсутствие символьной записи мешало развитию греческой математики. Страх бесконечности был почти в такой же степени сдерживающим фактором.

В *методе исчерпывания*, разработанном Архимедом, присутствовали все элементы, существенные для анализа бесконечно малых. Что касается современного анализа, то это не что иное, как теория бесконечных процессов, в основе которых лежит понятие *предела*. Точную формулировку этого понятия я оставляю до следующей главы. Здесь же достаточно сказать, что идея предела, предложенная Архимедом, совпадала с идеей, использованной для развития математического анализа Ньютоном и Лейбницем; и эта идея оставалась практически в неизменном виде до времен Кантора и Вейерштрасса. В самом деле, *исчисление пределов* основано на том рассуждении, что две величины стремятся к равенству, если разность между ними может быть сколь угодно малой. И именно эта идея лежит в основе метода исчерпывания.

Более того, этот принцип обеспечивает практический метод для определения предела, заключающийся в ограничении переменной величины сверху и снизу двумя другими переменными, так что она оказывается как бы зажатой в тиски. Так, например, в случае длины окружности, о котором я уже говорил, Архимед «зажимал» длину окружности двумя последовательностями правильных многоугольников со все увеличивающимся количеством сторон, из которых одну последовательность составляли вписанные в окружность многоугольники, а другую — описанные вокруг нее. И, как уже было сказано ранее, с помощью этого метода ему удалось показать, что число π заключено между значениями $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Также при помощи этого метода он рассчитал, что площадь под дугой параболы равна двум третям площади прямоугольника с такой же шириной и высотой. Эта задача была предшественницей современного интегрального исчисления.

Да, по справедливости следует сказать, что Архимед был основателем анализа бесконечно малых величин. По сравнению с интегральным исчислением восемнадцатого века методу исчерпывания не хватало соответствующих символьных обозначений, а также позитивного – или я бы даже сказал наивного – отношения к бесконечности. Никто из греков не последовал за Архимедом, и возможность исследовать богатые территории, открытые великим мастером, была оставлена другой эпохе.

Когда после тысячелетнего оцепенения европейская мысль стряхнула усыпляющее влияние, столь мастерски насаждавшееся отцами Церкви, вопрос о бесконечности стал одним из первых, на которые вновь было обращено внимание.

Однако для этого оживления характерно полное отсутствие критической строгости, присущей древним грекам несмотря на то, что математики эпохи Возрождения почти во всем опирались на греческие источники. Развитие неточных приближенных методов, введенных Кеплером и Кавальери, были продолжено, разве что с претензией на большую точность, Ньютоном и Лейбницем, а также Валлисом, придумавшим обозначение для бесконечности, братьями Бернулли, Эйлером и д'Аламбером.

Они обращались с бесконечно малыми величинами как с константами или как с переменными в зависимости от требований конкретной задачи; они как попало манипулировали бесконечными последовательностями и жонглировали пределами; к расходящимся последовательностям они относились, как если бы те удовлетворяли всем критериям сходимости. Свои понятия они определяли нечетко, методы использовали произвольно, а логике их аргументов приходилось подчиняться велениям интуиции. Короче говоря, они нарушали все законы строгости и математических приличий.

Настоящий шабаш, который последовал за введением бесконечно малых величин или, как их тогда называли, *indivisibilia*, был вполне естественной реакцией. Интуицию слишком долго держали взаперти строгие ограничения греков. Теперь она вырвалась на свободу, и не было Евклида, чтобы сдержать ее романтический полет.

Можно разглядеть и еще одну причину. Необходимо помнить, что все блистательные умы того времени выросли на доктрине схоластики. «Дайте нам ребенка в возрасте до восьми лет, – гласит изречение иезуитов, – и его будущее само позаботится о себе». (То есть после этого ребенок останется иезуитом до конца своих дней. – *Прим. пер.*) Кеплер с неохотой начал заниматься астрономией после того, как его надежды стать духовным лицом провалились; Паскаль оставил математику, чтобы стать религиозным отшельником; Декарт обуздывал свою симпатию к Галилею верой в авторитет Церкви; Ньютон в перерывах между работой над своими шедеврами писал трактаты по теологии; Лейбниц мечтал о таких структурах чисел, которые сделали бы мир безопасным для христианства. Для умов, воспитанных на логике рассуждений о Таинстве, Искуплении, Троице и Пресуществлении, обоснованность бесконечных процессов была действительно ерундой.

Здесь можно привести достаточно задержавшееся возражение епископа Беркли, который спустя четверть века после обнародования Ньютоном своей эпохальной работы об исчислении бесконечно малых написал трактат, озаглавленный «Аналитик, или рассуждение, адресованное к неверующему математику». В ответ на соображение, что в религии слишком многое основано на вере, епископ возражал, указывая, что предпосылки в математике покоятся не на более прочном фундаменте. С неподражаемым искусством и юмором он подверг доктрину бесконечно малых величин тщательному анализу и выявил множество неточных аргументов, неясных формулировок и вопиющих противоречий. Среди прочего он также говорит о терминах «флюксия» и «разность»; и именно против них направляет острие своего блестящего ирландского остроумия: «Тому, кто в состоянии переварить вторую или третью флюксию, второй или третий дифференциал, не следовало бы привередничать в отношении какого-либо положения в вопросах религиозных». (Имеется в виду насмешливое высказывание Эдмунда Галлея, чьим именем названа комета, о «непостижимых доктринах христианства», которых придерживался Беркли. – *Прим. пер.*)

«Флюксии» Ньютона и «разности» Лейбница в наши дни называются *производная* и *дифференциал.* Эти принципиальные понятия математических дисциплин вместе с аналитической геометрией развились в *дифференциальное и интегральное исчисление* и стали мощной движущей силой в становлении прикладных наук. Декарту мы обязаны созданием аналитической геометрии, а споры по поводу того, кто же, Ньютон или Лейбниц, первым придумал математический анализ, продолжались в течение всего восемнадцатого века и не вполне разрешены даже сейчас. А между тем, можно обнаружить, что принципы обеих дисциплин ясно очерчены в письме, которое Ферма адресовал Робервалю, датированном 22 октября 1636 года, за год до появления «Геометрии» Декарта и за 68 лет до публикации «Принципов» Ньютона. Если бы не странная склонность Ферма не публиковать результаты своих исследований, то честь создания и аналитической геометрии, и математического анализа принадлежала бы этому Архимеду эпохи Возрождения и математический мир был бы избавлен от столетнего унижения грязных споров.

Суть принципов Ньютона можно проиллюстрировать на примере движения, которое, кстати, было первым субъектом применения дифференциального исчисления. Рассмотрим частицу, движущуюся по прямой линии. Если за равные промежутки времени частица проходит равные расстояния, то говорят, что частица движется *равномерно*, а расстояние, которое она проходит за единицу времени, например за секунду, называют *скоростью* этого равномерного движения. Предположим теперь, что расстояния, которые частица проходит в равные промежутки времени, не равны, т.е. движение *не является равномерным*. Тогда скорость в том смысле, в котором мы только что использовали это слово, не определена. Но мы можем разделить весь путь, пройденный за определенный промежуток времени, на величину этого промежутка и назвать это отношение *средней скоростью*. Именно это отношение Ньютон назвал бы *первоначальным* отношением. Однако очевидно, что это значение зависит длины рассматриваемого интервала. Тем не менее можно заметить, что чем меньше интервал, тем больше значение скорости приблизится к какому-то определенному фиксированному значению... Мы получили пример *последовательности*, в которой с увеличением номеров элементов разность между двумя последующими элементами непрерывно уменьшается и в конце концов два соседних элемента становятся неотличимыми. Давайте теперь представим себе (и такое представление подтверждается нашим интуитивным понятием о *непрерывности пространства и времени*), что мы продолжаем уменьшение интервала времени *бесконечно*. Тогда, согласно Ньютону, наиболее отдаленный член этой последовательности (Ньютон его называл *ultima ratio* — последнее отношение) представляет собой *скорость в точке начала интервала*.

Сегодня мы говорим, что *по определению* скорость движущейся точки в любой момент времени — это предельное значение средней скорости, когда интервал времени, на котором средняя скорость вычисляется, уменьшается бесконечно (т.е. стремится к нулю). Во времена Ньютона формулировки были не столь точны.

Эти последние отношения Ньютон и называл *флюксиями.* Флюксия выражала скорость изменения переменной величины, такой как длина, площадь, объем, давление и т.д. Переменные величины Ньютон называл *fluent.* Жаль, что эти выразительные названия не сохранились, а вместо них появились нейтральные термины *производная* и *функция.* На латыни *fluere* означает течь; *fluent* — текущий, а *fluxion* — скорость течения.

Теория Ньютона имеет дело с непрерывными величинами, в ней также постулируется бесконечная делимость пространства и времени; в ней говорится о потоке и поток рассматривается как последовательность мгновенных рывков. Вследствие этого теория флюксий была открыта для всей той критики, аргументы которой две тысячи лет назад были высказаны Зеноном. И вековая вражда между «реалистами», которые хотели, чтобы математика шла на уступки грубой реальности человеческих чувств, и «идеалистами», настойчиво требовавшими, чтобы реальность приспосабливалась к велениям разума, готова была возобновиться. Нужен был только новый Зенон, и Зенон появился в странном облике англиканского священнослужителя. Но предоставим слово Джорджу Беркли, позднее ставшему епископом в Клойне:

«Однако подобно тому как наши чувства напрягаются и ставятся в затруднительное положение при восприятии крайне малых объектов, воображение (способность, производная от чувств) напрягается в еще большей степени и попадает в еще более затруднительное положение, пытаясь выработать четкое представление о мельчайших частицах времени или мельчайших приращениях, образованных за эти мельчайшие промежутки времени; и в гораздо большей степени ему приходится трудно, когда оно пытается постичь «моменты», или упомянутые приращения флюент, находящиеся в statu nascendi (в момент возникновения), в самом начале их образования или в начале существования, прежде чем те становятся конечными частицами. Вероятно, еще более трудно представить себе абстрагированные скорости подобных зарождающихся несовершенных величин. Однако, если я не ошибаюсь, скорости скоростей, вторые, третьи, четвертые, пятые и т.д. скорости вообще находятся за пределами всего человеческого понимания. Чем больше ум анализирует и развивает эти неуловимые идеи, тем больше он теряется и заходит в тупик; предметы, вначале мелькающие и крошечные, вскоре вообще исчезают из поля зрения. В каком бы смысле ни употреблять слова, вторая или третья флюксия, безусловно, представляются тайной, покрытой мраком. Начальная скорость начальной скорости, зарождающееся приращение зарождающегося приращения, т.е. вещи не обладающие никаким значением, – рассмотрите это в каком угодно свете и, если я не ошибаюсь, вы обнаружите, что составить об этом ясное понятие невозможно...

Великий автор метода флюксий чувствовал эту трудность и поэтому пустился во все эти изящные абстракции геометрической метафизики, без которых, как он понимал, ничего нельзя сделать на основе общепринятых принципов... Правда, надо признать, что он использовал флюксии подобно лесам, использующимся при строительстве здания, которые нужно было отбросить в сторону или от которых нужно было избавиться, когда уже было найдено, что конечные линии пропорциональны этим флюксиям... А что такое эти флюксии? Скорости исчезающих приращений. А что такое эти самые исчезающие приращения? Они не есть ни конечные величины, ни величины бесконечно малые, но они и не нули. Разве мы не имеем права назвать их призраками исчезнувших величин?..

И с тем чтобы вы более ясно могли понять силу и направленность изложенных выше замечаний и развить их еще дальше в своих собственных размышлениях, я ставлю в заключение следующие вопросы...

Вопрос 64. Разве математики, столь чувствительные в вопросах религии, строго скрупулезны в своей собственной науке? Разве они не подчиняются авторитету, не принимают вещи на веру и не верят непостижимому? Разве у них нет своих собственных непостижимых тайн и, более того, своих непоследовательностей и противоречий?»

(Джордж Беркли. Сочинения. Перевод Е.С. Лагутина)

Что же вышло из всех этих остроумных разглагольствований Беркли? Обрушившись с критикой на несоответствие и непоследовательность математической терминологии, он оказал математике реальную услугу. В последующие десятилетия произошли значительные изменения. Такие термины, как первоначальный и последний, возникающий и рождающийся, текущий и флюксия, были изгнаны из употребления. *Неделимые* превратились в *бесконечно малые величины*, название, сохранившееся до наших дней; бесконечно малая величина теперь стала просто переменной величиной, которая в пределе стремится к нулю. Медленно, но верно центральная идея предела стала доминирующей.

Если бы епископ Беркли появился через пятьдесят лет после написания «Аналитика», он не узнал бы ребенка, которого ругал, настолько благопристойным тот стал. Но был бы он удовлетворен? Кто угодно, только не Беркли! Острый глаз проницательного епископа тотчас заметил бы те же проступающие родимые пятна. То, против чего он возражал, было не столько недостаточной выразительностью языка (хотя это также составляло часть его критики), но скорее тем, на что указывал Зенон, а именно несостоятельностью нового метода в удовлетворении нашего интуитивного представления о непрерывном как о чем-то сплошном, неделимом, о чем-то не имеющем из частей, потому что любая попытка разделить его на части приведет к разрушению самого анализируемого свойства.

И если бы мы напрягли воображение еще больше и представили епископа, появившегося в наше время, то мы услышали бы от него те же самые возражения, те же самые уничтожающие обвинения. Но в нашем времени, к его удивлению и радости, он нашел бы в лагере противников мощную группировку тех, кто не только защищает его взгляды, но и приветствует его как первооткрывателя.

Но об этом позже.

Между тем анализ продолжал развиваться, не обращая внимания на предостережения критиков, постепенно выдвигался на первое место, завоевывая новые области. Сначала геометрия и механика, затем оптика, акустика, распространение тепла и термодинамика, электричество и магнетизм и, наконец, законы Хаоса попали под его непосредственно правление.

Говорит Лаплас:

«Мы можем представить себе настоящее состояние вселенной как следствие ее прошлого и причину ее будущего. Ум, которому были бы известны для какого-либо данного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наравне с движениями мельчайших атомов; для такого ума не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверным, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором».

И эта замечательная структура была создана математиками нескольких следующих столетий, которые не задумывались всерьез о фундаменте, на котором она покоится. Разве не удивительно, что несмотря на все произвольные рассуждения, смутные идеи и необоснованные обобщения было совершено так мало серьезных ошибок? «Шагайте вперед, и вера к вам придет» — воодушевляющий девиз д'Аламбера, с помощью которого он поддерживал мужество сомневающихся. И вдохновленные его словами, они действительно продвигались вперед, руководствуясь в своих блужданиях чем-то вроде слепой веры в обоснованность бесконечных процессов.

Затем наступил период критики: Абель и Якоби, Гаусс, Коши и Вейерштрасс и, наконец, Дедекинд и Кантор подвергли всю структуру тщательному анализу, устраняя неясности и двусмысленности. И что же стало конечным результатом этой реконструкции? Да, ***они признали негодной логику первооткрывателей, но полностью отстояли их веру.***

Важность бесконечных процессов для практических нужд технической цивилизации едва ли можно переоценить. Практически все приложения арифметики в геометрии, механике, физике и даже в статистике прямо или косвенно связаны с бесконечными процессами. Косвенно, из-за широкого использования в этих науках иррациональных и трансцендентных чисел; прямо, потому что большинство фундаментальных понятий этих наук невозможно было бы сколько-нибудь точно определить без этих процессов. Изгоните бесконечные процессы, и математика, как чистая, так и прикладная, вернется к тому же состоянию, в котором она была до Пифагора.

Наши представления о длине дуги кривой могут послужить отличной иллюстрацией. При этом физическое представление основывается на том, что кривая представляет собой изогнутую проволоку. Мы воображаем, что ***выпрямили*** проволоку, ***не растягивая*** ее; тогда длина отрезка прямой будет служить мерой длины дуги. Но что мы подразумеваем по словами ***не растягивая*** ее? Мы подразумеваем выпрямление без изменения длины. А это означает, что мы уже знаем кое-что о длине этой дуги. Такая формулировка — это очевидный *petitio principii* — круг в доказательстве — и не может служить математическим определением.

Альтернативой является вписывание в дугу последовательности прямолинейных контуров, представляющих собой фрагменты правильных многоугольников с увеличивающимся количеством сторон. Такая последовательность контуров стремится к пределу, и длина дуги определяется как предел последовательности.

И то, что верно для понятия длины, справедливо и для площадей, объемов, масс, импульсов, давлений, сил, нагрузок и деформаций, скоростей, ускорений и т.д. и т.д. Все эти понятия родились в «*линейном*» и «*рациональном*» мире, где ничего не занимало места и при этом было прямолинейным, плоским и однородным. Или нам придется отказаться от этих элементарных рациональных понятий, что будет означать настоящий переворот, поскольку эти понятия слишком глубоко укоренились в нашем мозгу; или же мы должны приспособить рациональные понятия к миру, который не является ни прямолинейным, ни плоским, ни однородным.

Но как можно плоское, прямое и однородное приспособить к тому, что является его полной противоположностью: к наклонному, изогнутому и неоднородному? Естественно, за конечное количество шагов это сделать невозможно! Чудо может совершить только волшебная *бесконечность*. Если мы решим придерживаться элементарных рациональных понятий, у нас не будет другой альтернативы, кроме как считать «изогнутый» мир реальности наших чувств самым последним в бесконечной последовательности *плоских* миров, который существует только в нашем воображении.

Чудо состоит в том, что это работает!

ГЛАВА 8

ИСКУССТВО СТАНОВЛЕНИЯ

> Для нас нет фикции: мы вычисляем; но, чтобы научиться вычислять, нам пришлось создать фикцию.
>
> *Ницше*

Возвращаясь опять к проблеме иррациональных чисел, я постараюсь показать тесную связь, существующую между этой проблемой и проблемой непрерывности, которая обсуждалась в предыдущей главе. Но сначала давайте вспомним, где мы остановились, прежде чем перейти к проблеме непрерывности.

Попытка применить рациональную арифметику к геометрическим задачам привела к первому кризису в истории математики. Две относительно простые задачи: определение диагонали квадрата и определение длины окружности – выявили существование новых математических сущностей, для которых не нашлось места в рациональной области. Так убедительно была продемонстрирована несостоятельность рациональной арифметики.

Дальнейший анализ показал, что процедуры алгебры в общем случае также несостоятельны. Стало очевидно, что расширение числового поля неизбежно. Но как это сделать? Как можно вставить бесконечное множество, более того, бесконечное количество бесконечных множеств иррациональных чисел, в достаточно плотную структуру множества рациональных чисел? Нам придется пересмотреть старую концепцию чисел – это несомненно. И поскольку старая концепция потерпела неудачу в области геометрии, мы должны найти в геометрии модель для новой. Непрерывная бесконечная прямая линия кажется идеально подходящей для такой модели. Но тут, однако, мы сталкиваемся с новой трудностью: если мы отождествим нашу область чисел с прямой, то каждому отдельному числу должна соответствовать точка. Но что такое точка? У нас должно быть если не определение, то, по крайней мере, отчетливое представление о том, что мы подразумеваем под элементом прямой – *точкой*.

Далее, общее понятие точки как геометрической сущности, не имеющей размеров, конечно, является вымыслом; но когда мы анализируем этот вымысел, то обнаруживаем за ним три отчетливые идеи. Во-первых, мы представляем точку как некий *порождающий* элемент, который при движении описывает линию. Кажется, это представление лучше всего согласуется с нашим интуитивным понятием о *непрерывности*, то есть о том свойстве, которым мы в первую очередь наделяем прямую. Однако когда мы пытаемся принять это динамическое понятие в качестве основы для аналогии между прямой линией и числовой областью, мы сталкиваемся с двумя несовместимостями.

В самом деле, наши чувства воспринимают движение как нечто характерное, неделимое и непрерываемое. Сама попытка разложить движение на элементы приводит к разрушению непрерывности, которую мы решили сохранить. Из-за чисел мы должны рассматривать прямую как последовательность бесконечно малых остановок, что несовместимо с самой идеей движения, которое мы представляем как прямую противоположность состоянию покоя. В этом заключается сила аргументов Зенона.

Мы видели, как математики пытались преодолеть это противоречие путем изобретения анализа бесконечно малых; мы видели, как этот анализ, начавшись с геометрии и механики, преуспел в завоевании главенствующего положения во всех точных науках и стал подлинной математической *теорией об изменении*. С прагматической точки зрения, этот стремительный триумф анализа является достаточным доказательством обоснованности его методов. Но хотя пудинг и познается при еде, процесс поедания все же не проливает свет на природу пудинга. Подлинный успех анализа только лишь обостряет старый вопрос: из чего же состоит непрерывное?

Во-вторых, точку можно рассматривать как пересечение двух прямых, то есть *метку, оставленную на данной прямой* другой линией. В качестве таковой точка является просто разделительным элементом, способом разбиения прямой на две непересекающиеся взаимно дополняющие области. Именно эту идею Ричард Дедекинд использовал в качестве отправной точки для своей эпохальной работы «Непрерывность и иррациональные числа», которая появилась в 1872 году. О ней я расскажу в следующей главе.

И наконец, мы можем считать точку предельным положением, к которому приводит *бесконечный процесс* на отрезке прямой. Этот процесс может принимать разные формы; в настоящий момент достаточно сказать, что типичным примером такого процесса может служить дихотомия древних греков. Аналогом бесконечных процессов в арифметике является *бесконечная* последовательность, и именно рациональную бесконечную последовательность использовал Георг Кантор в своей знаменитой теории иррациональных чисел, которая была впервые опубликована в 1884 году. Именно эта простая и многообещающая идея и является предметом обсуждения в данной главе.

Последовательность называется *рациональной*, если все ее члены являются рациональными числами; она бесконечна, если для каждого ее члена существует последующий. Совокупность операций, порождающую бесконечную последовательность, я назову бесконечным процессом.

Прототипом всех бесконечных процессов является *повторение*. В самом деле, сама концепция бесконечности возникает из представления о том, что *все, что было сказано или сделано однажды, всегда можно повторить*. При повторении рационального числа a мы получим *постоянную* последовательность

$$a, a, a, a, \ldots$$

Будем говорить, что такая последовательность *представляет число a*.

Другая фундаментальная операция, которую я назову *последовательным процессом*, заключается в последовательном сложении. Пусть дана последовательность

$$a, b, c, d, e, f, g, \ldots,$$

тогда при помощи последовательного процесса мы создаем новую последовательность

$$a, a + b, a + b + c, a + b + c + d, \ldots$$

Получилась последовательность *частичных сумм ряда*, порожденного последовательностью a, b, c... Таким образом, из постоянной последовательности 1, 1, 1, ... мы получим *натуральный ряд* 1, 2, 3, 4 ... (Ряд – это сумма *всех* членов последовательности. – *Прим. пер.*)

Такой процесс, очевидно, можно применить к любой последовательности, и, следовательно, каждой последовательности соответствует ряд. Однако особый интерес представляют те ряды, которые порождены *стремящимися к нулю* (*«исчезающими»*) *последовательностями*. Отличительным признаком этих последовательностей является постепенное уменьшение последовательных членов, так что по ним всегда можно продвинуться настолько далеко, чтобы найти член, меньший по величине любого заранее заданного числа. В качестве примера можно привести такие последовательности

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$$

Теперь, если даны эти две последовательности, третью последовательность можно сформировать почленным вычитанием одной последовательность из другой. Может случиться, что полученная таким образом последовательность разностей *будет стремиться к нулю, как, например, в случае двух таких последовательностей*

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6} \ldots \text{ и}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \ldots$$

В этом случае разности между соответствующими членами образуют последовательность

$$\frac{3}{1\times2}, \frac{5}{2\times3}, \frac{7}{3\times4}, \frac{9}{4\times5}, \frac{11}{5\times6}, \frac{13}{6\times7}, \frac{15}{7\times8}, \ldots$$

Знаменатель каждого члена — это произведение двух последовательных чисел, а числитель — сумма этих же чисел. Тысячный член этой последовательности будет меньше, чем 0,002, миллионный — меньше чем 0,000002 и т.д. Эта последовательность определенно стремится к нулю.

Я буду называть те последовательности, разность между которыми стремится к нулю, асимптотическими. *Одна из двух асимптотических последовательностей может быть постоянной, как, например, в случае*

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Постоянная последовательность представлена рациональным числом 1. Я буду говорить, что вторая последовательность асимптотическая с первой *также представлена числом 1*, или что она *сходится к пределу 1.*

Само собой разумеется, что если две последовательности асимптотические с третьей, то они являются асимптотическими по отношению друг другу и, более того, если одна из них сходится в пределе к определенному числу, то то же самое верно и в отношении других. Но если так, большое количество последовательностей, несмотря на их различия по форме, представляет одно и то же число. И это действительно имеет место. Например, число 2 можно представить бесконечным количеством рациональных последовательностей, в том числе такими:

$$1{,}9,\ 1{,}99,\ 1{,}999,\ 1{,}9999,\ \ldots$$

$$2{,}1,\ 2{,}01,\ 2{,}001,\ 2{,}0001,\ \ldots$$

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, \cdots$$

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{15}{16}, \cdots$$

Это справедливо для любого рационального числа. В частности, любую стремящуюся к нулю последовательность можно рассматривать как представление рационального числа 0.

Простейшей последовательностью, которая в то же время имеет большое историческое и теоретическое значение, является *геометрическая последовательность*. Если выбрать любое число в качестве ее первого элемента и любое другое число в качестве знаменателя, то, умножая поочередно каждый из элементов на этот знаменатель, можно получать следующий элемент. Любую постоянную последовательность можно считать частным случаем геометрической последовательности, со знаменателем, равным 1. Если исключить этот тривиальный случай, то можно разделить геометрические последовательности на *возрастающие* и *убывающие*. Вот соответствующие примеры

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots 2^n, \ldots \text{ и}$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$$

Члены возрастающей геометрической последовательности по абсолютной величине возрастают *бесконечно*, т.е. всегда можно найти член последовательности, который будет больше любого заранее заданного сколь угодно большого числа. Такие последовательности называются *расходящимися.*

Убывающая геометрическая последовательность всегда стремится к нулю и поэтому представляет для нас особый интерес. В значительной степени этот интерес обусловлен тем, что последовательность частичных сумм ряда, порожденного такой стремящейся к нулю геометрической последовательностью, всегда сходится к рациональному пределу; и наоборот, ***любое рациональное число может быть представлено как предел некоторой последовательности частичных сумм ряда, соответствующего рациональной геометрической последовательности.*** Более того, здесь мы имеем тот редкий случай, когда «сумма последовательности» фактически может быть вычислена на основании непосредственно имеющихся данных.

Геометрическая последовательность называется *геометрической прогрессией.* Сходящаяся к нулю геометрическая последовательность порождает *сходящуюся последовательность частичных сумм.* Если обозначить первый член последовательности как a, а знаменатель как r, то предел частичных сумм для этой последовательности определяется простой формулой

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Этот предел называется *суммой* прогрессии.

Дихотомическая последовательность из первого аргумента Зенона также является геометрической прогрессией

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Ей соответствует последовательность частичных сумм

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$

Эта последовательность сходится к числу 1, что можно увидеть непосредственно или в результате вычисления по формуле для суммы прогрессии.

Сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

равна конечному числу 1, хотя в соответствии с утверждением Зенона она состоит из бесконечного количества слагаемых. Введение таких понятий, как сходимость и предел, можно оспаривать с разных точек зрения, но после того как эти понятия признаны, аргументы Зенона о том, что сумма бесконечного ряда чисел обязательно будет бесконечно большой, теряют свою силу.

Второй аргумент Зенона также включает в себя геометрическую прогрессию. Чтобы разговор приобрел более конкретный характер, давайте считать, что Ахиллес бежит со скоростью 100 футов/минуту, а черепаха ползет со скоростью 1 фут/минуту. Когда Ахиллес догонит черепаху, если первоначально она опережает его на 990 футов? Зенон говорит: «Никогда». Однако здравый смысл подсказывает нам, что Ахиллес нагоняет черепаху со скоростью 99 футов/минуту, значит, первоначальное расстояние 990 футов будет преодолено через 10 минут. Но давайте рассуждать так, как это нам предлагает Зенон. За то время, пока Ахиллес добежит до того места, где первоначально была черепаха, она проползет 1/100 часть того расстояния, которое их разделяло, т.е. 9,9 фута; за то время, пока он достигнет этого ее нового положения, черепаха продвинется на 1/100 от 9,9 футов, т.е. на 0,099 фута. Но «то, что сказано однажды, всегда можно повторить». Значит, расстояние между Ахиллесом и черепахой будет уменьшаться в геометрической прогрессии

$$990,\ 9{,}9,\ 0{,}099,\ 0{,}00099,\ \ldots$$

После вычисления по формуле мы получим, что сумма этой прогрессии равна 1000. Ахиллес пробежит 1000 футов, прежде чем догонит черепаху, и на это ему потребуется 10 минут. Опять сумма бесконечного количества слагаемых оказалась конечной.

Периодическая десятичная дробь — это всего лишь замаскированный ряд, полученный из геометрической последовательности.

Рассмотрим, например, бесконечную десятичную дробь, которая является чисто периодической

$$0{,}36363636\ldots$$

Запишем ее короче как 0,(36). На самом деле это означает

$$\frac{36}{100}+\frac{36}{10\,000}+\frac{36}{1\,000\,000}+\cdots$$

Это, однако, сумма членов геометрической последовательности со знаменателем 1/100, и результат вычисления по формуле суммы показывает, что этот ряд сходится к рациональному пределу 36/99 или 4/11. То же самое верно и для так называемых *смешанных* периодических дробей, таких, например, как 0,34(53). После умножения этой дроби на 100, мы получим чистую периодическую дробь и в результате число $34\frac{53}{99}$; а поскольку исходная дробь составляла 1/100 от этого числа, то мы можем записать, что $0{,}34(53)=\frac{3419}{9900}$.

Даже конечную десятичную дробь можно представить в виде периодической, с периодом, состоящим из нулей. Например:

$$2{,}5 = 2{,}500000... = 2{,}5(0).$$

В школе всех нас учили, как преобразовать обыкновенную дробь в десятичную. Эта процедура называется делением в столбик, *и мы из опыта знаем*, что в результате получится или конечная дробь, как, например, в случае $^1/_8$, что эквивалентно 0,125; или периодическая, как в случае $^1/_7$, что соответствует 0,(142857). Это свойство можно доказать со всей строгостью и сформулировать его следующим образом: ***Любое рациональное число можно представить единственным образом в виде бесконечной периодической десятичной дроби; и наоборот, любая периодическая десятичная дробь представляет рациональное число.***

С другой стороны, мы, очевидно, можем сконструировать любое количество десятичных дробей, которые хотя и будут иметь *бесконечное количество знаков*, но не будут *периодическими*. Распределение цифр может быть хаотичным или подчиняться некому систематическому, но не периодическому закону. Вот пример такой десятичной дроби

$$1{,}10111213...192021...100101...$$

Если бы удалось найти постоянную рациональную последовательность *a*, *a*, *a*, ..., которая была бы асимптотической с последовательностью членов ряда, соответствующего этой дроби, тогда эта последовательность представляла бы число *a*. Но мы знаем, что это невозможно; поскольку если бы это было возможно, то последовательность была бы периодической, а это не так.

Что же тогда представляет эта последовательность? Мы не знаем. То, как мы сформулировали понятия сходимости и предела, не дает нам возможности классифицировать эту последовательность как число. Но, однако, у нас есть интуитивные представления о сходимости и пределе как о чем-то *возрастающем*, но никогда не превосходящем какой-то определенной величины или о чем-то *убывающем*, но также никогда не снижающемся ниже определенной величины. С этой интуитивной точки зрения, непериодические десятичные дроби *сходятся*, и то же относится ко многим другим последовательностям, таким как, например,

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(1\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{4}\right)^4, \left(1\frac{1}{5}\right)^5, \ldots,$$

которая, кстати, представляет трансцендентное число *e*.

Именно это наивное представление о сходимости и пределе было принято в качестве аксиомы в самом начале развития математического анализа, и надо признать, что, несмотря на то что оно приводило к неверным заключениям, именно этому представлению анализ обязан своими первыми успехами. Вот самые естественные вопросы, которые приходят в голову: Возможно ли изложить эти смутные интуитивные понятия сходимости и предела в виде точно сформулированного определения? Возможно ли при помощи такого определения создать новый инструмент, который позволит нам работать с этими новыми математическими сущностями, к которым относятся и непериодические дроби, и другие последовательности, с той же степенью достоверности, какая достигается в частном случае последовательностей, сходящихся к рациональным пределам?

Чтобы ответить на эти вопросы, мы должны проанализировать, нет ли среди свойств последовательностей, которые сходятся к рациональным пределам, такого свойства, которое можно непосредственно обобщить также и на гораздо более широкий класс последовательностей, не сходящихся к рациональным пределам. Это свойство, которое я буду называть *самоассимптотичностью* сходящейся последовательности, открыл Георг Кантор.

Чтобы пояснить, о чем идет речь, рассмотрим снова последовательность частичных сумм дихотомической последовательности. Давайте «продвинем» ее, отбросив первый член, так что второй член станет первым, третий – вторым и т.д. Такой процесс «продвижения» позволяет создать последовательность последовательностей частичных сумм ряда

$$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\frac{255}{256},\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\frac{127}{128},\frac{255}{256},\frac{511}{512},\ldots\ldots\ldots,$$

которую, очевидно, можно продолжать бесконечно. Простая проверка показывает, что все эти последовательности являются асимптотическими одна с другой; то есть последовательность разностей, сформированная любыми двумя последовательностями, стремится к нулю.

Можно показать, что такая самоасимптотичность сохраняется для любых последовательностей, сходящихся к рациональному пределу; но и это далеко не все; фактически, любой бесконечный ряд, соответствующий непериодической десятичной дроби обладает точно таким же свойством. В самом деле, рассмотрим в качестве примера следующую десятичную дробь

$$0{,}101112131415\ldots$$

которую можно записать как последовательность частичных сумм

$$0{,}1,\ \ {,}10,\ \ {,}101,\ \ {,}1011,\ \ {,}10111,\ \ {,}101112,\ \ldots$$

Очевидно, что отбрасывание любого количества рациональных приближений не повлияет даже на внешний вид последовательности. Таким образом, мы можем записать ее в виде последовательности

$$0{,}101112,\ \ {,}1011121,\ \ {,}10111213,\ \ {,}101112131,\ \ldots$$

которая будет очевидно асимптотической с первой.

Так Кантор, отождествив термины *самоасимптотичность* и *сходимость*, расширил понятие сходимости, которое до тех пор относилось только к тем последовательностям, которые были асимптотическими с какой-либо постоянной рациональной последовательностью. Более того, он расширил понятие *предела*, считая, что самоасимптотическая последовательность порождает новую математическую сущность, которую он отождествил с тем, что задолго до него назвали *действительным числом.*

Применение слова число к таким сущностям будет справедливо, если мы покажем, что они удовлетворяют всем условиям принципа постоянства.

То, что удовлетворено первое условие, следует из того, что среди всех сходящихся последовательностей есть те, которые сходятся к пределам, являющимся рациональными числами. Вторым условием является критерий сравнения. Рассмотрим две последовательности (А) и (В), которые определяют два действительных числа a и b, и сформируем последовательность разностей (А − В). Может случиться, что эта последовательность стремится к нулю, и это будет означать, что последовательности (А) и (В) являются асимптотическими, и можно сказать, что числа a и b равны. В качестве примера можно привести две последовательности

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(1\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{4}\right)^4, \left(1\frac{1}{5}\right)^5, \ldots$$

и

$$2+\frac{1}{2!},\ 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!},\ 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!},\ 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!},\ \cdots$$

Можно доказать асимптотичность этих последовательностей, и, следовательно, они представляют одно и то же действительное число — трансцендентное число e.

Если последовательность разностей не стремится к нулю, то может быть, начиная с некоторого члена, все ее члены положительны. В этом случае можно сказать, что последовательность (А) является мажорирующей по отношению к последовательности (В) или что действительное число a больше действительного числа b. Если же, начиная с некоторого члена, все последующие члены последовательности разностей отрицательны, тогда можно сказать, что последовательность (А) является мажорируемой по отношению к последовательности (В) или что действительное число a меньше действительного числа b. Можно показать, что этот критерий сводится к стандартному, когда последовательности (А) и (В) сходятся к рациональным пределам.

И наконец, мы определим сумму и произведение двух действительных чисел как действительные числа, задаваемые последовательностями, полученными попарным сложением или умножением соответствующих членов исходных последовательностей. В этом определении, конечно, подразумевается, что полученные таким образом последовательности также сходятся. Это и в самом деле можно строго доказать. Более того, можно доказать, что так определенные операции сложения и умножения обладают свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности.

Следовательно, с точки зрения принципа постоянства, новые величины можно с полным правом отнести к числам. После их присоединения область рациональных чисел становится всего лишь провинцией намного более обширного царства, которое мы назовем областью *действительных чисел*.

Будет ли эта новая область включать в себя иррациональные числа алгебры и трансцендентальные числа анализа? Да, и для того чтобы это показать, вернемся к уравнению $x^2 = 2$, которое две тысячи лет назад под видом проблемы определения диагонали квадрата и спровоцировало кризис, который теперь завершился появлением области действительных чисел.

В школе мы учили алгоритм извлечения квадратного корня. В результате этих действий мы получаем $\sqrt{2}$ в виде набора рациональных приближений, которые образуют сходящуюся последовательность

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ \ldots$$

У этой последовательности нет рационального предела, но последовательность, полученная возведением каждого ее члена в квадрат, а именно

$$1,\ 1{,}96,\ 1{,}9881,\ 1{,}999396,\ \ldots$$

сходится к рациональному числу 2.

Таким образом, когда мы говорим, что положительным решением уравнения $x^2 = 2$ является данная последовательность, и записываем число, определенное ею как $\sqrt{2}$, мы имеем в виду не только то, что последовательность, состоящая из квадратов этой последовательности, сходится; но и то, что она относится к тому редкому типу сходящихся последовательностей, у которых есть *рациональный предел*, в нашем случае число 2. Другими словами, последовательность представляет $\sqrt{2}$, поскольку мы признаем, что число 2 хотя и не является полным квадратом, но является пределом, к которому сходится последовательность полных квадратов.

Аналогичную процедуру можно применить и к другим алгебраическим или трансцендентным уравнением. Но фактическое построение алгоритма, который в каждом конкретном случае приводил бы к формированию последовательности, сходящейся к искомому решению, может представлять значительную математическую трудность. Однако если уж он найден, последовательность всегда может быть представлена в виде бесконечной десятичной дроби, которая по самой своей сути является сходящейся и, значит, соответствует некоторому действительному числу.

Таким образом, признание обоснованности бесконечных процессов выводит нас за рамки рациональной арифметики. Мы получили *общую арифметику, арифметику действительных чисел*, и она дает нам способ решать задачи, которые не под силу рациональной арифметике.

Сначала может показаться, что, назвав пределы рациональных последовательностей таким общим словом — действительное число, мы проявили непредусмотрительность. В самом деле, вполне естественно теперь рассмотреть бесконечную последовательность таких иррациональных чисел. Если мы назовем первый вид иррациональных чисел иррациональными числами *первого ранга*, тогда новые пределы можно назвать иррациональными числами второго ранга, из них можно получить иррациональные числа третьего ранга и т.д. и т.д. То, что это не просто жонглирование числами, демонстрирует такое простое выражение, как $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Непосредственная его интерпретация порождает *иррациональную* последовательность

$$\sqrt{2{,}4}, \sqrt{2{,}41}, \sqrt{2{,}414}, \ldots$$

Итак, по крайней мере в данном случае, возражение не имеет под собой оснований. В самом деле, если мы обозначим $\sqrt{1+\sqrt{2}} = x$, то после несложных алгебраических преобразований увидим, что x является решением уравнения $x^4 = 2x^2 + 1$. К этому уравнению можно применить процедуру, аналогичную алгоритму извлечения квадратного корня, и это позволит нам построить набор рациональных приближений, которые покажут, что число $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ может быть представлено рациональной последовательностью асимптотической с той иррациональной последовательностью, которую мы рассматривали вначале.

И, как ни странно это кажется на первый взгляд, этот факт является общим. *Любой иррациональной последовательности мож-*

но сопоставить асимптотическую с ней рациональную последовательность (и, как правило, не одну). Таким образом, введение *ранжированных* иррациональных чисел, возможно интересное с чисто формальной точки зрения, является избыточным в том, что касается общей арифметики.

Все, что может быть выражено в виде иррациональной последовательности, допускает представление в виде последовательности рациональных чисел — это утверждение является фундаментальным. Оно отводит рациональным числам особую роль в теории. Поскольку любое действительное число может быть представлено бесконечными сходящимися рациональными последовательностями, оказывается, что области рациональных чисел, усиленной понятиями сходимости и предела, достаточно, чтобы построить арифметику, а через арифметику — теорию функций, которая является краеугольным камнем современной математики.

Но этот фундаментальный факт не менее важен и в прикладной математике. Так как любую рациональную последовательность можно представить в виде бесконечной десятичной дроби, все вычисления можно систематизировать. Ограничив себя определенным количеством десятичных знаков, компьютер может получить приближенное решение в рациональных числах любой иррациональной или трансцендентной задачи. И более того, степень точности этой процедуры не только можно легко оценить, но даже задать заранее.

Когда короля Луи XIV спросили, в чем заключается основополагающий принцип его внешней политики, он цинично ответил: «Аннексия! Потом всегда можно найти толкового юриста, чтобы оправдать это действие».

Я всегда вспоминаю этот анекдот, когда размышляю над историей двух проблем: бесконечности и иррациональности. Мир не стал ждать, пока Вейерштрасс и Кантор благословят процедуру замены иррациональных чисел на их приближенные значения или, что то же самое, замены предела бесконечной последовательности на некоторый достаточно удаленный от начала член этой последовательности. Люди измеряли поля и возводили здания; прокладывали тоннели и строили мосты; они работали руками и проектировали машины, используя *рациональные приближения* и не задавая вопросов об обоснованности используемого принципа.

Я раньше уже говорил о том, что Теон и Герон вычислили приблизительные значения квадратных корней из целых чисел. Есть данные, свидетельствующие о том, что эта проблема имеет еще более древнее происхождение и, вероятно, ее история восходит к временам ранней пифагорейской школы. Но именно Архимед впервые систематически применял этот принцип.

Давайте еще раз обратимся к классической задаче о квадратуре круга, которая так хорошо отражает различные этапы развития математики. Как я уже упоминал, метод Архимеда заключался в том, что он рассматривал длину окружности, ограничивая ее двумя наборами правильных многоугольников, как вписанных, так и описанных. Он начал с шестиугольников и путем удвоения количества сторон дошел до 96-угольника. Одну последовательность формировали периметры вписанных многоугольников, другую – описанных. Если бы этот процесс мог продолжаться бесконечно, то две эти последовательности сошлись бы к одному и тому же пределу – длине окружности. Если диаметр окружности равен 1, то общий предел равнялся бы π.

Что примечательно в этих последовательностях, так это то, что обе они иррациональны. В самом деле, первые члены первой последовательности равны $6, 6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, а первые члены второй последовательности – $4\sqrt{3}, 24(2-\sqrt{3})$, и последующие члены включают радикалы возрастающей сложности. Эти иррациональные последовательности Архимед, в полной убежденности, заменял на рациональные и таким способом пришел к выводу, что число π заключено между двумя рациональными числами $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$.

Те же самые две классические задачи, о радикалах и оценке числа π, дали толчок развитию еще одного важного бесконечного процесса: непрерывных (или цепных) дробей. Хотя некоторые люди, изучающие историю математики, считают, что такие дроби были известны уже грекам, первые записи, дошедшие до нас, содержатся в книге Бомбелли, которая датируется 1572 годом. Однако сам автор говорит, что «многие методы построения дробей приведены в работах других авторов; одни авторы оспаривали и осуждали методы других без должных оснований, поскольку, по моему мнению, все они указывают на одно и то же». Если все это справедливо, значит, алгоритм уже был известен в начале шестнадцатого века.

«Одно и то же», о котором говорит Бомбелли, это нахождение рациональных приближений для радикалов. Я продемонстрирую этот метод на примере $\sqrt{2}$. Поскольку это число заключено между 1 и 2, давайте запишем $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}$. Отсюда можно вывести, что $y = 1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{y}$.

Продолжая такие рассуждения, мы получаем дробь

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dotsb}}}}$$

Это частный случай непрерывной дроби; такая дробь называется *простой*, так как все числители равны 1, и *периодической*, так как знаменатели повторяются.

Если мы ограничимся одним элементом, двумя, тремя и т.д. непрерывной дроби, то мы получим набор рациональных приближений, *которые сходятся в одной точке*. В случае $\sqrt{2}$ этот набор выглядит так:

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{5},\ 1\frac{5}{12},\ 1\frac{12}{29},\ 1\frac{29}{70},\ 1\frac{79}{169},\ \dots$$

Два свойства непрерывных дробей делают их особенно значимыми. В первую очередь, *простые непрерывные дроби всегда сходятся*. А во-вторых, образуется *колеблющаяся* последовательность. Фактически, мы можем разбить набор полученных рациональных приближений на две группы, в первую из которых войдут первое, третье, пятое и т.д. приближения, а во вторую — второе, четвертое, шестое и т.д. В случае $\sqrt{2}$ мы получим две асимптотические последовательности:

$$1 \qquad 1\frac{2}{5} \qquad 1\frac{12}{29} \qquad 1\frac{70}{169}$$

$$1\frac{1}{2} \qquad 1\frac{5}{12} \qquad 1\frac{29}{70} \qquad 1\frac{169}{408}$$

Первая последовательность непрерывно возрастает, и она ограничена сверху $\sqrt{2}$, вторая — непрерывно убывает и ограничена снизу $\sqrt{2}$. Такие колебания непрерывных дробей делают их незаменимыми при получении точных приближений, поскольку ошибку, вносимую при остановке на каком-либо шаге, можно очень легко оценить.

В восемнадцатом веке Эйлер показал, что *любой квадратичный радикал может быть представлен в виде простой периодической непрерывной дроби*. Вскоре после этого Лагранж доказал, что обратное также верно, т.е. что любая такая *периодическая дробь представляет собой решение квадратного уравнения*. Таким образом, периодические непрерывные дроби играют ту же самую роль по отношению к квадратным уравнениям, что периодические десятичные дроби по отношению к линейным уравнениям.

Процедуру, которую мы применили к $\sqrt{2}$, можно применить к любому уравнению; так что действительное решение самого общего уравнения может быть представлено в виде непрерывной дроби. Но только в случае квадратного уравнения дробь будет периодической. На первый взгляд может показаться, что непрерывные дроби особенно удобны для алгебраических вычислений. Если бы это было так, то у нас был бы критерий, позволяющий отличить алгебраические иррациональные числа от трансцендентных. Поскольку алгебраическое происхождение дробей накладывает определенные ограничения на величины их элементов, это так и есть. И на самом деле, именно эти ограничения позволили Лиувиллю обнаружить *существование неалгебраических чисел*. Но за исключением этого случая, алгебраические операции не занимают сколько-нибудь привилегированного положения по отношению к непрерывным дробям или (насколько нам известно) к любым другим последовательностям. Именно это поразительное «безразличие» бесконечных процессов к алгебре является причиной значительных трудностей в теории трансцендентных чисел.

Такие, например, трансцендентные числа, как π и e, можно достаточно элегантно выразить через непрерывные дроби, как читатель может сам убедиться из таблицы, приведенной в конце этой главы.

Это разложение числа π в непрерывную дробь было открыто Ламбертом в 1761 году и имело большое историческое значение. То, что эта дробь не является периодической, окончательно показало, что число π нельзя получить как корень квадратного уравнения с *рациональными коэффициентами*. Это предполагало, что задачу о квадратуре круга нельзя разрешить с помощью только циркуля и линейки. Я сказал *предполагало*, но не *доказывало*, поскольку число π все же пока еще могло оказаться корнем квадратного уравнения с коэффициентами в виде только квадратичных радикалов; в этом случае непрерывная дробь была бы непериодической, но построение с помощью циркуля и линейки было бы возможно.

Есть удивительная аналогия между простыми непрерывными дробями и бесконечными десятичными рядами. Во-первых, оба вида последовательностей всегда сходятся: т.е. любой случайный закон следования знаменателей непрерывной дроби или знаков в десятичной дроби, в конечном итоге, всегда представляет действительное число. Во-вторых, если закон следования является периодическим, то десятичный ряд представляет рациональное число, в то время как периодическая непрерывная дробь представляет квадратичное иррациональное число, т.е. число вида $a+\sqrt{b}$, где a и b являются рациональными. И наконец, любое действительное число может быть представлено или в виде десятичного ряда, или как непрерывная дробь при условии, что обычные дроби считаются частным случаем непрерывных.

Благодаря этим свойствам, оба бесконечных процесса особенно хорошо подходят для представления действительных чисел. Однако история бесконечных процессов преимущественно была связана с процедурой намного более общей, хотя в тоже время эта ее общность и нечеткость приводили к множеству озадачивающих и парадоксальных результатов.

Нет сомнений, что происхождение этой процедуры связано с геометрическими прогрессиями, которые, судя по «Аргументам» Зенона, были уже известны в Древней Греции. Если мы ограничимся только рассмотрением положительных геометрических прогрессий, то увидим, что прогрессия сходится, если ее знаменатель меньше чем 1, а в противном случае расходится. Этот результат можно напрямую обобщить в знакопеременную геометрическую прогрессию, т.е. на случай, когда знаменатель прогрессии отрицателен. Знакопеременная геометрическая прогрессия также будет сходиться, если знаменатель является правильной дробью, и расходиться в противном случае. Однако возникает интересный случай, когда знаменатель равен -1. В этом случае последовательность выглядит следующим образом:

$$a,\ -a,\ a,\ -a,\ a,\ -a,\ a,\ -a,\ a,\ -a,\ \ldots$$

Такую последовательность сегодня мы называем расходящейся, несмотря на то что ее частичные суммы никогда не превышают a. Действительно, частичные суммы этого ряда образуют последовательность:

$$a,\ 0,\ a,\ 0,\ a,\ 0,\ a,\ 0,\ \ldots,$$

не имеющую определенного предела. Однако Лейбниц думал иначе. Он утверждал, что в данном случае пределы a и 0 равновероятны; и придерживался мнения, что сумма в пределе стремится к среднему значению $^1/_2$.

Работа Лейбница, связанная с рядами, появилась в конце семнадцатого века и была в числе первых публикаций по этому вопросу. Для этого начального периода исследования рядов было характерно не придавать большого значения вопросу о сходимости или расходимости ряда, в то время как в наши дни этот вопрос считается основным. Так, в частности, предполагалось, что если последовательность членов ряда стремится к нулю, то этот ряд обязательно сходится. Это, как мы видели, справедливо для геометрических прогрессий, что и стало источником широко распространенного заблуждения. Оно продолжалось до публикации в 1713 году работы Якоба Бернулли по бесконечным рядам, которая и внесла ясность в проблему. Поводом послужил *гармонический* ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Последовательность членов этого ряда стремится к нулю, и в *то время считалось*, что этот ряд сходится. Однако, благодаря своему брату Иоганну, в своей книге Бернулли привел доказательство того, что этот ряд *хотя и медленно, но несомненно расходится.*

Эта работа Бернулли привлекла внимание к тому факту, что необходим четкий критерий сходимости. То, что *общий член ряда* (т.е. последовательность членов ряда) стремится к нулю, является *необходимым* условием, но, в общем случае, не является *достаточным.* Достаточные условия были установлены д'Аламбером, Маклореном, Коши, Абелем и многими другими. Я сейчас не буду подробно останавливаться на этом вопросе, поскольку он не вписывается вполне в мой общий замысел. Однако следует отметить, что даже сегодня, установить, сходится ряд или нет, в некоторых случаях достаточно сложно.

Однако существует частный случай рядов, которые с давних пор представляли значительный интерес. Для этих рядов стремление к нулю общего члена *является* критерием сходимости. Это так называемые *знакопеременные* ряды. В качестве типичного примера можно привести следующий:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

Этот ряд сходится к так называемому ***натуральному логарифму*** числа[1] 2, приблизительное значение которого равно 0,693. Однако ряд *абсолютных значений* представляет собой гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots,$$

который, как мы установили, является расходящимся.

Об этих рядах я упомянул, потому что они послужили причиной множества недоразумений. В семнадцатом и восемнадцатом веках ряды повсеместно рассматривали не как последовательности особого рода, но как *суммы* бесконечного количества слагаемых. Поэтому было естественно приписывать этому «сложению» свойства ассоциативности и коммутативности, присущие операции с конечным количеством слагаемых. И поскольку предполагалось, что сумма не зависит от порядка слагаемых, считалось допустимым перегруппировывать члены ряда как угодно.

В 1848 году Лежен Дирихле доказал, что это действительно имеет место для сходящихся рядов со всеми положительными членами. Однако если ряд содержит отрицательные члены, то возможны два случая: если ряд является *абсолютно сходящимся*, т.е. если ряд абсолютных значений сходится, тогда свойства ассоциативности и коммутативности сохраняются. Если же ряд сходится только *условно*, т.е. ряд положительных членов расходится, то эти свойства не выполняются. И тогда, по сути, соответствующей перестановкой членов можно прийти к заключению, что сумма равна какому угодно числу.

Неудивительно, что до Дирихле множество самых фантастических результатов было получено путем манипуляций над рядами, в частности, над теми рядами, которые мы называем *условно сходящимися*. Исторической иллюстрацией может послужить гармонический ряд. Обозначим через x «сумму» всех его членов с нечетными номерами, а через y – с четными. Тогда мы можем записать

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

---

[1] Натуральный логарифм числа A определяется как показатель степени x в уравнении $e^x = A$; $x = \log A$, где e – трансцендентное число, о котором мы несколько раз упоминали раньше. Его приблизительное значение $e \approx 2{,}7182818284\ 59045$.

и беспечно преобразовать это выражение как

$$y=\frac{1}{2}(x+y)\Rightarrow\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y\Rightarrow x-y=0.$$

Мы пришли к ошибочному заключению, что знакопеременный гармонический ряд сходится к нулю, хотя, фактически, ряд сходится в пределе к натуральному логарифму 2.

Хотя сегодня такие рассуждения кажутся достаточно абсурдными, они были широко распространены не только в восемнадцатом веке, но даже и в начале девятнадцатого. Даже в 1828 году Абель в письме к своему бывшему учителю Холмбоу жаловался:

«Расходящиеся ряды – изобретение дьявола, и стыдно основывать на них какие-либо доказательства. Используя эти ряды можно вывести какое угодно заключение, вот почему они стали причиной такого большого количества заблуждений и парадоксов... Я стал чрезмерно внимателен ко всему этому, и за исключением геометрических прогрессий во всей математике не существует ни одного бесконечного ряда, сумма которого определялась бы строго. Другими словами, вещи наиболее важные в математике при этом меньше всего обоснованы. Большинство из них правильно, хотя это чрезвычайно удивительно. Я пытаюсь найти этому объяснение, и это весьма интересный вопрос».

В письме Абеля уже чувствуются новые веяния. Они ознаменовали начало новой эры, критической эпохи в математике. Наивное отношение, царившее в математике с начала Ренессанса, подошло к завершению. В каждой области математических наук были достигнуты значительные успехи; появилась необходимость привести все результаты в систему и, более того, тщательно исследовать весь фундамент, на котором эта система основана.

Рассказать о бесконечных процессах, начиная с Коши и Абеля, означает пересказать историю современного математического анализа и теории функций. Это не входит в мои цели. Но этого краткого экскурса в раннюю историю бесконечных процессов достаточно, чтобы показать, что теория иррациональных чисел Кантора появилась в результате длительной исторической эволюции; эволюции, которая началась с кризиса пифагорейской школы, была временно прервана, когда прогресс в целом приостановился, и продолжилась только в эпоху Возрождения.

Как и в случае с анализом, о котором я говорил в предыдущей главе, основным движущим мотивом на протяжении длительного периода исканий была своего рода слепая вера в *абсолютную природу неограниченного*. Эта вера нашла замечательное подтверждение в финале: в новой теории *континуума*, о которой я собираюсь рассказать.

Разложение чисел π и е в ряды

Число π

$\frac{\pi}{2}$ = пределу произведения: $\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\ldots\ldots$

$\frac{\pi}{4}$ = пределу, к которому сходится ряд: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}\ldots\ldots$

$\frac{\pi}{2}$ = пределу, к которому сходится ряд: $1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)+\frac{1}{7}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)+\ldots$

$\frac{4}{\pi}$ = пределу дроби:

$$1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cfrac{11^2}{2+\ldots}}}}}}$$

Число e

e = пределу последовательности: $\left(1\frac{1}{2}\right)^2, \left(1\frac{1}{3}\right)^3, \left(1\frac{1}{4}\right)^4, \left(1\frac{1}{5}\right)^5, \ldots$

e = пределу, к которому сходится ряд: $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots\ldots$

e = пределу дроби:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}}}}}}}$$

ГЛАВА 9

ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОБЕЛОВ

> Умом ощупал я все мирозданья звенья,
> Постиг высокие людской души паренья,
> И, несмотря на то, уверенно скажу:
> Нет состояния блаженней опьяненья.
>
> Вот снова день исчез, как ветра легкий стон,
> Из нашей жизни, друг, навеки выпал он.
> Но я, покуда жив, тревожиться не стану
> О дне, что отошел, и дне, что не рожден.
>
> *Омар Хайям*
> *(Перевод О. Румера)*

Допущение об обоснованности бесконечных процессов уводит нас за пределы области рациональных чисел и предоставляет возможность браться за такие задачи, которые были не под силу рациональной арифметике. Поэтому естественно возникает вопрос, смогли ли мы продвинуться в решении старой задачи об установлении взаимно однозначного соответствия между точками прямой и областью чисел.

Мы знаем, что рациональная арифметика не справилась с этой задачей. Но преуспела ли общая арифметика, арифметика действительных чисел, в решении этого все еще открытого вопроса? Возможно ли теперь арифметически представить те точки прямой, для которых не было рационального представления? Эта старая задача, вызвавшая первоначальный кризис и ставшая причиной пересмотра всех основ арифметики, теперь опять возникает в новом и более общем виде:

Можно ли ЛЮБОМУ действительному числу поставить в соответствие точку на прямой? Можно ли ЛЮБОЙ точке на прямой поставить в соответствие действительное число?

Если ответ утвердительный, то это значит, что мы можем установить полное и взаимнооднозначное соответствие между областью действительных чисел, с одной стороны, и множеством точек на прямой, с другой. Если такое соответствие существует, то мы можем уверенно использовать интуитивный язык геометрии в формулировках арифметического анализа и свести вопросы к числам и величинам. Мы видим, насколько фундаментальным является вопрос и как много зависит от ответа на него!

Чтобы понять ответ, который современная наука дает на этот вопрос, мы должны отдельно рассмотреть природу двух множеств: области действительных чисел и точек на прямой.

Об области действительных чисел мы знаем следующее:

Первое. Она вполне упорядочена: относительно любых двух чисел *a* и *b* мы можем сказать, какое из них больше. Более того, если *a* больше, чем *b*, и *b* больше, чем *c*, то *a* также больше, чем *c*. Короче говоря, мы можем упорядочить бесконечную совокупность таких чисел по порядку их величины. И мы можем далее полагать, что все действительные числа упорядочены таким образом. Вот что мы имеем в виду, когда говорим, что множество действительных чисел *вполне упорядочено*.

Второе. В этой области нет ни первого, ни последнего члена: Каким бы большим не было положительное действительное число, всегда есть еще большее; каким бы маленьким не было отрицательное число, всегда есть еще меньшее. Именно это мы имеем в виду, когда говорим, что область действительных чисел простирается от отрицательной бесконечности до положительной.

Третье. Среди действительных чисел можно найти все рациональные числа. Область *рациональных чисел* – это всего лишь подобласть большей области действительных чисел.

Четвертое. Множество действительных чисел является *всюду плотным*. Между любыми двумя действительными числами, как бы мало ни было расстояние меду ними, всегда можно вставить бесконечное количество других действительных чисел.

Следует ли из всего вышесказанного, что область действительных чисел является полной? Мы склонны были бы согласиться с этим без колебаний, если бы не наш опыт с рациональными числами; вспомним, что все сказанное сейчас о действительных числах в равной степени можно отнести и к рациональным. И несмотря на компактную структуру последних, мы выяснили, что она «полна пропусков». Итак, какие же, в самом деле, у нас есть основания утверждать, что рациональные и трансцендентные числа полностью заполнили эти пропуски? Может быть, не так далек день, когда будут открыты новые процессы, которые, создав новые математические сущности, продемонстрируют новые пропуски, на этот раз в области действительных чисел?

Чтобы ответить на этот вопрос, Кантор предпринял исследование фундаментальных различий между областями рациональных и действительных чисел.

Множество рациональных чисел, хотя и является вполне упорядоченным и компактным, в то же время несовершенное, поскольку *не замкнуто* по отношению к бесконечным процессам. Оно не замкнуто по отношению к бесконечным процессам, что доказывает само существование иррациональных чисел, потому что существуют бесконечные рациональные последовательности, хотя и сходящиеся, но не имеющие рационального предела. Короче говоря, множество рациональных чисел не является совершенным, потому что оно не содержит все свои собственные *предельные значения.*

А вот множество действительных чисел является не только вполне упорядоченным и плотным, но и совершенным в силу того, что оно замкнуто по отношению ко всем бесконечным процессам. Бесконечная последовательность действительных чисел, если она сходится, представляет действительное число. В самом деле, такую бесконечную последовательность, если она не является рациональной сама по себе, можно заменить рациональной последовательностью, которая будет сходиться к тому же самому пределу, и этот предел по определению будет действительным числом. Множество действительных чисел содержит все свои собственные *предельные значения* и поэтому является *совершенным.*

(Совершенное множество – замкнутое множество, не имеющее изолированных точек, т.е. совпадающее с множеством всех своих предельных точек. – *Прим. пер.*)

Как показывает анализ области рациональных чисел, не каждое компактное множество является совершенным; но Кантор доказал, что каждое *совершенное* множество является компактным. Множество, которое является одновременно и вполне упорядоченным, и совершенным, Кантор определил как *континуум.* Область действительных чисел является континуумом, арифметическим континуумом. А область рациональных чисел, с другой стороны, континуумом не является, поскольку не совершенна.

Итак, область действительных чисел можно полностью описать, сказав, что она является континуумом; континуумом в смысле Кантора. Мы видели, что такие слова, как *континуум*, *непрерывный*, *непрерывность*, использовались в точных науках с самого начала. С незапамятных времен термин *непрерывное* применялся к пространству, времени и движению в неопределенном смысле чего-то непрерываемого; чего-то, что в своих мельчайших частях, по самой своей сути, обладает всеми теми же свойствами, что и целое; чего-то односвязного; короче говоря, чего-то непрерывного(!), знаете ли. Это одно из тех нечетких, произвольно понимаемых понятий, смысл которых воспринимается интуитивно; и любая попытка сформулировать их в виде строгого определения неизменно заканчивается нетерпеливым: «Ну, вы же понимаете, что я хочу сказать!»

Прототипом всех представлений, которые удовлетворяют таким описаниям, является линия и, в частности, прямая линия; именно ее наш разум преимущественно наделяет свойством непрерывности. Так что, если нам нужно установить полное и взаимнооднозначное соответствие между прямой и областью действительных чисел, необходимо убедиться, что нет вопиющих противоречий между интуитивным представлением о непрерывности, которую мы приписываем прямой, и точным, научным определением непрерывности действительных чисел, которое ввел Кантор.

Если бы, не осмеливаясь дать точную формулировку нашего интуитивного представления о непрерывности, я все же попытался бы хотя бы грубо описать, что я подразумеваю под словом *непрерывность*, я бы подумал вслух примерно так:

«Время есть суть всех вещей. Мать-Природа не делает скачков, потому что Отец-Время не знает, что такое скачки. Время, по-видимому, не может быть остановлено, и поэтому нет ничего стихийного в природе. Время течет и в своих потоках несет все, что постижимо».

Следовательно, когда мы пытаемся описать непрерывность любого явления, мы неизменно обнаруживаем, что даже бессознательно обращаемся к непрерывности времени. Прямая линия кажется нам прототипом всего непрерывного, потому что для нашего мышления это всего лишь конкретное представление застывшего мгновенно потока времени[1].

Точно так же и с другими явлениями. Наш разум теряется перед чем-то спонтанным; вот почему наши научные теории так отчаянно цепляются за эволюцию. Будь это космогония, теория о происхождении жизни или социологические гипотезы, везде мы обнаружим этот ужас перед катаклизмом. Любой ценой мы отказываемся признать, что катастрофа и революция, спонтан-

---

[1] См. *Приложение Г*, с. 278.

ное зарождение и случайное открытие могут быть доминирующими факторами в истории вселенной или человечества.

И так же как эволюция рисует нам глянцевую картину прошлого, теория причинности, связывая все явления в непрерывную цепь, охраняет наше будущее от спонтанных потрясений и защищает от ужаса хаоса. Эти смутные идеи непрерывности и причинности так тесно связаны, что одна из них постоянно поддерживает другую. И в этом нет ничего удивительного: наша убежденность в непрерывности вселенной и наша вера в причинно-следственную связь между событиями есть не что иное, как два аспекта примитивного осознания того, что мы называем *временем*. Итак, с одной стороны, у нас есть убежденность в том, что *Natura non facit saltus* (природа не делает скачков), а с другой стороны — иллюзия, что *Post hoc, ergo propter hoc* (после этого, следовательно, по причине этого).

И в этом я вижу причину конфликта между геометрической интуицией, из которой выведены наши физические концепции, и логикой арифметики. Гармонии вселенной известна только одна музыкальная форма — *легато*, в то время как в симфонии чисел наоборот звучит только *стаккато*. В основе всех попыток примирить эти расхождения лежит надежда, что ускоренное *стаккато* может восприниматься нашими чувствами как *легато*. Но наш разум всегда клеймил такие попытки как обман и отвергал такие теории как издевательство, как метафизику, цель которой объяснить понятие, превращая его в противоположное.

Но все эти протесты бесполезны. Чтобы выстроить мост над пропастью, разделяющей представление о непрерывности времени и структуру чисел с присущей ей прерывностью, человеку пришлось еще раз обратиться к могуществу разума, «который знает о своей возможности представить бесконечное повторение того, что было сделано однажды». В этом и заключается историческая роль бесконечности; именно поэтому на протяжении многих веков проблемы континуума и бесконечности остаются двумя альтернативами единственной дилеммы. Долгий процесс приспособления достиг своей кульминации в теории Кантора, в которой любое число считается *целью* бесконечного количества скачков, а континуум включает в себя не только все возможные остановки, но также и все возможные *цели*. Это характерный пример теории в духе стаккато; но и она не избежала тирании времени. Она просто приспособилась к этой тирании, услужливо рассматривая текущий поток времени как бесконечную последовательность пульсаций в яростно ускоренном темпе.

Разум восстает против этой тирании, он требует теории чисел, свободной от внешних влияний геометрии или механики. Итак, история свидетельствует еще об одном событии — новой теории иррациональных чисел, которая носит имя своего автора Рихарда Дедекинда.

Суть его концепции заключается в следующем небольшом отрывке из эпохального труда «Непрерывность и иррациональные числа», вышедшего в 1872 году, за десять лет до того как были опубликованы работы Кантора по тому же вопросу:

«Прямая бесконечно более богата индивидуумами-точками, чем область... рациональных чисел индивидуумами-числами...

Если теперь мы попытаемся, следуя арифметике, описать явления, характеризующие прямую линию, мы обнаружим, что области рациональных чисел недостаточно. Становится абсолютно необходимо улучшить этот аппарат созданием новых чисел, если область чисел должна обладать такой же полнотой или, как мы можем сказать теперь, такой же непрерывностью, как и прямая линия...

Сравнение области рациональных чисел с прямой линией приводит нас к осознанию существования пробелов, определенной неполноты или разрывности первой. Прямой линии мы приписываем полноту, отсутствие пробелов, или непрерывность. В чем же заключается эта непрерывность? Все должно зависеть от ответа на этот вопрос, и только через него мы получим действительно научную основу для исследования всех непрерывных множеств. Из невнятных высказываний о неразрывной связи мельчайших частей, очевидно, ничего нельзя получить; задача заключается в том, чтобы указать точные характеристики непрерывности, которые могли бы служить основой для обоснованных логических выводов. Долгое время я безрезультатно размышлял над этим, но, в конце концов, я нашел то, что искал. Может быть, это открытие будет по-разному оценено разными людьми; большинству его содержание может показаться крайне тривиальной. Оно состоит в следующем. В предыдущем разделе внимание было обращено на тот факт, что каждая точка прямой производит разложение прямой на две части таким образом, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой [части]. Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, т.е. в следующем:

“Если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска".

Как сказано ранее, я думаю, что не ошибусь, предполагая, что каждый сразу же согласится со справедливостью этого утверждения; более того, большинство моих читателей будет очень сильно разочаровано, узнав, что это тривиальное замечание разоблачает тайну непрерывности. На это я могу сказать, что меня радует то, что каждый человек находит вышеприведенный принцип настолько очевидным и настолько созвучным его собственным представлениям о прямой линии, поскольку я абсолютно не в состоянии представить никаких доказательств его правильности и никто другой не в силах это сделать. Принятие этого свойства прямой линии есть не что иное, как аксиома, посредством которой мы только и признаем за прямой ее непрерывность, мысленно вкладываем (hineindenken) непрерывность в прямую. Из того, что пространство реально существует, *не* обязательно следует, что оно непрерывно; многие свойства пространства сохранились бы такими же, если бы оно не было непрерывным. И если бы мы знали наверное, что пространство не обладает непрерывностью, то, при желании, *нам все-таки ничто не могло бы помешать* сделать его непрерывным через мысленное заполнение его пробелов. Это заполнение должно было бы состоять в созидании новых точек и осуществлялось бы сообразно упомянутому принципу».

Давайте проанализируем, как работает принцип Дедекинда. Как и Кантор, в качестве отправной точки Дедекинд взял множество рациональных чисел. Однако вместо того чтобы отождествлять действительное число со сходящимся рядом рациональных чисел, он считает, что действительное число порождено могуществом разума для классификации рациональных чисел. Эту конкретную схему классификации он назвал *schnitt*, что переводили как *разрез Дедекинда*, *расщепление*, *разделение* или *сечение*. Я предпочитаю последнее.

Это сечение является точным аналогом концепции, которую Дедекинд использовал при определении непрерывности прямой. Точно так же как каждая точка прямой делит ее на две смежные непересекающиеся области, так и каждое действительное число представляет собой способ разделении всех рациональных чисел на два класса, у которых нет общих элементов, но вместе они составляют все множество рациональных чисел в целом.

И наоборот, любое уравнение, любая схема классификации, любой процесс, который может произвести такое деление области рациональных чисел, в силу самого этого факта отождествляется с числом, которое по определению является действительным числом, элементом нового множества.

Рациональные числа являются частью этого широкого множества, так как любое из них по отдельности можно рассматривать как классифицирующий элемент. Действительно, по отношению к любому заданному рациональному числу, например числу 2, все рациональны числа можно разделить на два класса: те, которые меньше или равны 2, попадут в *нижний класс*; те, которые больше 2 — в *верхний класс*. У этих двух групп не будет общих элементов, и вместе они составляют все множество рациональных чисел. Рациональное число 2 можно рассматривать как сечение и, следовательно, действительное число.

Но очевидно, что потенциал этого перспективного принципа не исчерпывается только лишь такими тривиальными сечениями. Никто не препятствует нам, например, разделить все рациональные числа, на те, квадраты которых меньше или равны данному рациональному числу, например 2, и те, квадраты которых больше 2. Эти два класса так же не пересекаются, как и в предыдущем примере; и, как и ранее, эти два класса составляют вместе все множество рациональных чисел. Это сечение тоже определяет действительное число, которое мы отождествляем с нашим старым знакомым $\sqrt{2}$.

С другой стороны, хотя как рациональные, так и иррациональные числа могут быть представлены в виде сечений, но выбор рациональных чисел в качестве базиса не остается без последствий, поскольку между рациональным и иррациональным сечением есть существенная разница. Рациональное сечение само по себе является частью нижнего класса: оно как политик, разделяющий партию и присоединяющийся к ее левому крылу. Но *иррациональное* сечение стоит абсолютно само по себе: оно как *вопрос*, который разделяет партию, но не может быть частью ни левого, ни правого крыла. Иррациональное число, производящее рассечение, не принадлежит ни к нижнему, ни к верхнему классу. Другими словами, в случае рационального сечения нижний класс имеет наибольший элемент, а верхний — не имеет наименьшего; в случае иррационального сечения нижний класс не имеет наибольшего элемента, а верхний — не имеет наименьшего.

В соответствии с теорией Дедекинда, это единственное различие между двумя типами чисел: оно характеризует рациональное число как *принадлежащее одному* из классов, в то время как свойством иррациональных чисел является то, что они *не принадлежат ни одному* из классов.

Чтобы доказать, что сечения Дедекинда являются настоящими числами, необходимо показать, что они удовлетворяют всем условиям принципа постоянства. Все, что было сказано в предыдущем разделе, доказывает, что первое условие удовлетворено. Также предельно просто и абсолютно строго можно доказать, что удовлетворены и другие требования. Критерий сравнения; определение операций; доказательство того, что эти операции обладают свойствами ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности, — все это является полной аналогией соответствующих утверждений в теории Кантора и я не буду утомлять читателя этими подробностями.

Фундаментальная теорема в теории Кантора, о том, что множество действительных чисел замкнуто по отношению к бесконечным процессам, также имеет свой аналог в теории Дедекинда. При определении области действительных чисел естественно снова задать вопрос: не приведет ли последовательное применение принципа к дальнейшему расширению области? Другими словами, пусть теперь сечение делит на два класса все *действительные* числа. Может ли такое сечение создать новый тип величин, которые нельзя найти среди *действительных* чисел? Ответ — *нет*! Любое такое сечение может быть сведено к сечению из области рациональных чисел. Множество всех сечений области рациональных чисел является *замкнутым.*

Полная эквивалентность двух теорий арифметического континуума была признана самими авторами, и их соперничество, если когда-либо было соперничество, теперь осталось только в истории. Любому сечению области рациональных чисел соответствует предел бесконечной последовательности; и наоборот, предел любой бесконечной последовательности можно использовать для сечения области рациональных чисел. Все возможные сечения, с одной стороны, и все пределы рациональных последовательностей — с другой, полностью идентичны и являются просто двумя описаниями одного и того же множества — арифметического континуума.

С метафизической точки зрения, все это, действительно, ставит в тупик. Как я уже говорил раньше, теория Кантора является завершением длительного исторического процесса, сечение Дедекинда — смелой и оригинальной концепцией. В теории Кантора бесконечный процесс используется для построения числового множества, тогда как нигде в определении действительного числа Дедекинд не использует явно ни слово *бесконечный*, ни такие слова, как *стремится, возрастает бесконечно, сходится, предел, меньше любой заранее заданной величины*, и тому подобных. Теория Кантора является откровенно динамичной: приближение к предельному значению напоминает движение точки, падающей на центр притяжения. Теория Дедекинда по существу *статична*; в ней используется только сила разума, который располагает элементы согласно определенной схеме. Поэтому на первый взгляд кажется, что мы полностью освободили концепцию числа от гнета интуитивного представления о времени; гнета, навязанного длительной тесной связью с геометрией и механикой.

Но сама эквивалентность двух теорий, отправные точки которых почти диаметрально противоположны, а подходы к разрешению проблемы столь различны, показывает, что не так уж все благополучно с теорией Дедекинда, как могло показаться вначале. И на самом деле, глубокий анализ процедуры, предложенной Дедекиндом, обнаруживает, что бесконечность в ней все же подразумевается, даже если явно не используется. Применение принципа сечения к *конечному* множеству рациональных чисел приводит к тривиальности, сразу же обнаруживает бесплодность такого подхода. Более того, любое практическое применение этого принципа для определения иррационального числа неизбежно влечет за собой использование аппарата, аналогичного бесконечной последовательности Кантора.

То же самое относится и к связи теории Дедекинда с интуитивным представлением о времени. Аксиома Дедекинда — «если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разделение прямой на два класса, это рассечение прямой на два куска» — является квалифицированным изложением фундаментального свойства, приписываемого времени. Наша интуиция позволяет нам действием разума разделять *все время* на два класса: *прошлое* и *будущее*, которые не пересекаются, но вместе создают все время, то есть *бесконечность, вечность*. А *сейчас* — это и есть сечение, которое отделяет все прошлое от всего будущего. Любой момент прошлого когда-то был этим *сейчас*, и любой момент будущего станет им когда-то; поэтому любой момент может играть роль такого сечения. Конечно, нам известны только разрозненные мгновения прошлого, но силой нашего разума мы заполняем пробелы между ними; мы полагаем, что между любыми двумя мгновениями – неважно, насколько тесно они связаны в нашей памяти, были и другие мгновения. И мы теоретически допускаем такую же плотность мгновений в будущем. Вот что мы имеем в виду, говоря о течении времени.

Более того, как это ни парадоксально кажется на первый взгляд, *настоящее действительно иррационально* в том смысле, который вкладывал в это слово Дедекинд. Оно является сечением, но не принадлежит ни прошлому, ни будущему. Действительно, в арифметике, основанной на чистом времени, если бы такая арифметика вообще была возможна, именно иррациональные числа оказались бы чем-то само собой разумеющимся, а все титанические усилия нашей логики были бы направлены на доказательство существования рациональных чисел.

Наконец, когда Дедекинд говорит: «если бы мы знали наверное, что пространство не обладает непрерывностью, то, при желании, нам все-таки ничто не могло бы помешать сделать его непрерывным через мысленное заполнение его пробелов», то он утверждает это *post factum*. Этот процесс заполнения был осуществлен много веков назад, и мы никогда не обнаружим никаких разрывов в пространстве по той простой причине, что мы не сможем представить себе разрывов во времени.

Но, несмотря на то, что ни Кантор, ни Дедекинд так и не преуспели в освобождении непрерывности от влияния наших представлений о времени, древний конфликт между нашим восприятием непрерывности и научной концепцией числа закончился убедительной победой науки. Эта победа стала следствием необходимости отстоять, узаконить как есть процедуру, которая еще со времен Ферма и Декарта была необходимым инструментом математического анализа. История дисциплины, которую мы называем *аналитической геометрией*, рассказана в следующей главе. Здесь же мне достаточно сказать, что эта дисциплина родилась при попытке применить к задачам геометрии аппарат арифметического анализа. В результате появился механизм передачи разуму абстрактных свойств чисел. Эта наука снабдила анализ богатым, образным языком и направила его в русло обобщений, до тех пор немыслимых.

Молчаливое предположение, на котором строится вся аналитическая геометрия, заключается в том, что точки на прямой, а значит и на плоскости, и в пространстве можно представить числами. Это допущение, разумеется, полностью эквивалентно утверждению, что можно установить взаимнооднозначное соответствие между точками прямой и действительными числами. Замечательный успех аналитической геометрии, тот факт, что она так превосходно служит целям как анализа, так и геометрии, придает этому допущению неопровержимую убедительность, подтверждаемую практикой. Необходимо включить этот принцип в общую логическую структуру математики. Но как?

В таких условиях математика действует директивно. С помощью подходящего постулата она строит мост через пропасть, разделяющую интуицию и рассудок. Этот постулат вытесняет интуитивное представление и заменяет его логически непротиворечивой концепцией. Сама неопределенность интуиции способствует такой замене, не только правдоподобной, но и крайне востребованной.

Так произошло и здесь. С одной стороны, была логически непротиворечивая концепция действительных чисел и их множества, арифметического континуума; с другой стороны — расплывчатые представления о точках и их множестве, линейном континууме. Необходимо было постулировать тождественность этих двух континуумов или, что то же самое, декларировать, что:

Любой точке прямой можно поставить в соответствие одно и только одно действительное число, и наоборот, любое действительное *число может быть представлено* единственной точкой на прямой.

В этом и заключается знаменитая аксиома Кантора-Дедекинда.

Это утверждение, узаконив молчаливое допущение, на котором строилась аналитическая геометрия уже более двухсот лет, стало фундаментальной аксиомой этой дисциплины. Как и многие другие аксиомы, эта аксиома, на самом деле, является хорошо замаскированным определением: она определяет новый математический объект — *арифметическую прямую*. С этого момента прямая, а следовательно, плоскость и пространство перестают быть интуитивными понятиями и становятся просто *носителями чисел*.

Итак, эта аксиома означает арифметизацию геометрии, то есть освобождение анализа от влияния геометрической интуиции, которой он обязан своим рождением и развитием. Более того, это смелое заявление о том, что отныне анализ намеревается взять на себя управление геометрией и механикой, а через них и другими областями познания, которые еще ближе к грубой реальности наших чувств.

Длительные усилия создать арифметику по образу и подобию реальности не увенчались успехом из-за неопределенности самой реальности. Поэтому арифметика создала новую реальность по своему подобию. Бесконечные процессы преуспели там, где рациональные числа потерпели неудачу.

Numeri mundum regnant — Числа правят миром.

ГЛАВА 10

ТЕРРИТОРИЯ ЧИСЕЛ

> К Архимеду пришел молодой человек за знанием. Он сказал: "Научи меня, о господин, тому божественному искусству, которое так возвышенно, что служит познанию небес, и за Ураном способно открыть еще и другие планеты". Мудрец сказал: "Это искусство и в самом деле божественно, как ты говоришь, но божественным оно было еще до изучения вселенной, до того как стало возвышенно служить познанию небес, до того как Уран и другие планеты были открыты. Та вселенная, которую ты видишь, это всего лишь отражение бога, который правит на Олимпе, – Вечного *Числа*".
>
> *К.Г. Якоби*

Пробы и ошибки, искания и заблуждения – вот история развития наших знаний. В постоянной борьбе за существование, одновременно и мешающей и побуждающей к действиям, игрушка обстоятельств и раб традиций своего времени – человек руководствовался в этом развитии не логикой, но интуицией и накопленным опытом предков. Это свойственно всем видам человеческой деятельности, и я приложил немало усилий, чтобы показать, что математика не является исключением.

Однако кто знает, может быть, привычка систематизировать объяснения, приобретенная за годы преподавания, вынудила меня непреднамеренно отклониться? Ведь эволюции числа, представленной в общих чертах, кажется, действительно присуща определенная логическая целостность. Но картина в общих чертах – это всего лишь черновой набросок: ему не хватает подлинной выразительности. Особые точки кривой больше скажут нам о ее истинной сущности, чем форма кривой; точно так же неправильности в ходе развития любой человеческой деятельности более ясно выявят факторы, лежащие в ее основе, чем это сделают черты общие с другими аналогичными видами деятельности.

Систематическое изложение материала в учебнике по математике основано на логической целостности, а не на исторической последовательности событий. Но ни в школьном, ни в университетском курсе математики об этом не упоминается, и, следовательно, при обучении складывается впечатление, что историческое развитие понятия числа происходило в том порядке, в котором написаны главы учебника. Именно это впечатление в значительной степени стало причиной распространенного мнения, что в математике отсутствует человеческий фактор. Поэтому кажется, что здание математики было воздвигнуто без лесов: оно просто выросло в своем застывшем величии, этаж за этажом! Его архитектура безупречна, так как основана на чистом разуме, его стены неприступны, так как были возведены без ошибок; ошибкам или даже колебаниям, а значит, человеческой интуиции здесь нет места! Короче говоря, непрофессионалам кажется, что здание математики построено не человеческим разумом, склонным к заблуждениям, а непогрешимым Духом Божьим.

Но история математики вскрывает ошибочность таких представлений. Она показывает, что прогресс в математике шел извилистой дорогой и что главную роль в нем играла интуиция. Дальние аванпосты были захвачены раньше, чем территория между ними была исследована, а часто даже раньше, чем исследователи догадывались, что вообще есть какая-то промежуточная территория. Функцией именно интуиции было создание новых форм, хотя признанным правом логики было принять или отвергнуть эти формы, *в зарождении которых она не принимала участия.* Но решения суда выносились нескоро, а в это время новым созданиям приходилось жить, и, дожидаясь, пока логика узаконит их существование, они процветали и множились.

Эволюция комплексных чисел, самый фантастический сюжет в истории математики, несет на себе все следы такого развития. Разве наука о числах, прежде чем отважиться на новые завоевания, ждала, пока Вейерштрасс, Кантор и Дедекинд подведут под действительные числа логическую основу? Нет, принимая законность действительных чисел без доказательств, она продолжала исследовать другую таинственную область своего мира, и в результате этой экспедиции стала хозяйкой новой значительной территории с беспрецедентным потенциалом.

Мы проследим новую концепцию до самого ее истока. Поэтому я вернусь к изучению задачи в алгебре, которая привела к появлению действительных чисел. Мы прервали это изучение из-за длительного экскурса в бесконечное. Теперь мы вернемся к ней, значительно обогатив нашу концепцию числа, приняв на вооружение новый метод — бесконечные процессы. Вместо множества рациональных чисел теперь в нашем распоряжении арифметический континуум, и в дополнение к рациональным процессам конечной алгебры у нас появился мощный аппарат анализа. Теперь, вне всяких сомнений, мы готовы с уверенностью взяться за общее уравнение алгебры!

Но те читатели, которые еще помнят элементарную алгебру, знают, что это не совсем так: действительных чисел недостаточно для решения любых алгебраических уравнений. И чтобы доказать это, вовсе не обязательно строить замысловатые уравнения высоких степеней. Достаточно рассмотреть одно из самых простейших квадратных уравнений: $x^2 + 1 = 0$.

Оно не определяет сечения Дедекинда, и мы не можем построить по Кантору последовательность, квадраты которой в пределе сходились бы к числу -1. В двенадцатом веке брамин Бхаскара выразил это простым и результативным утверждением:

«Квадрат положительного числа, как и квадрат отрицательного числа, является положительным; и квадратный корень же из положительного числа двойной, и положительный, и отрицательный; не существует квадратного корня из отрицательного числа, поскольку отрицательное число не является квадратом».

Порыв записать $x=\sqrt{-1}$ в качестве решения этого уравнения, сразу же обуздывается пониманием, что у этого выражения нет конкретного значения. И индийские, и арабские математики не поддались этому соблазну. Честь открытия *мнимой* единицы принадлежит итальянским математикам эпохи Возрождения. В 1545 году Кардано впервые осмелился обозначить символом бессмысленное. Рассуждая о представлении числа 10 в виде двух слагаемых, произведение которых равнялось бы 40, он показал, что формальное решение приводит к появлению невозможных выражений: $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$.

И точно так же как и в случае отрицательных чисел, простое написание невозможных радикалов вызвало к жизни символические создания. Правда, их упоминали с оговорками, что они *не имеют смысла*, *не подлинные*, *невозможные*, *выдуманные*, *мистические*, *мнимые*. Слишком многое заключено в названии, даже если это прозвище или оскорбление.

Достаточно удивительно, но не квадратное, а кубическое уравнение придало новый импульс развитию этих мистических сущностей в сторону признания их настоящими числами. Это произошло при следующих обстоятельствах:

Кубическое уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет по крайней мере одно действительное решение, а может иметь три. Для случая, когда только одно решение является действительным, Сципион Даль Ферро, Тарталья и Кардано разработали процедуру, которая обобщена в так называемой формуле Кардано. Однако эта формула не работает, когда все три корня являются действительными, так как в этом случае радикалы, входящие в эту формулу, представляют *мнимые* числа.

Рассмотрим историческое уравнение $x^3 = 15x + 4$, рассмотренное Бомбелли в его книге по алгебре, опубликованной в 1572 году. У этого уравнения есть три действительных решения, а именно: $4,\ -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$. А применение формулы Кардано приводит к чисто мнимому результату:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Возможно, Бомбелли догадался, что два радикала представляют собой выражения вида $p+\sqrt{-q}$ и $p-\sqrt{-q}$, которые сегодня мы называем *комплексно-сопряженными*. Если это было именно так и если сложение таких сущностей выполнить в соответствии с обычными правилами, то сумма двух таких «не подлинных» величин может оказаться действительным числом и, возможно, даже одним из реально существующих решений уравнения, известным Бомбелли как 4. Дадим слово самому Бомбелли:

«По мнению многих, это была безумная мысль; и я долгое время придерживался того же мнения. Казалось, что все основано скорее на софистике, нежели на истине. Но я долго искал, пока фактически не доказал, что все так и есть на самом деле».

И Бомбелли в самом деле показал, что два кубических радикала, которые после упрощения принимают вид $2+\sqrt{-1}$ и $2-\sqrt{-1}$, в сумме дают 4.

Да, эти величины невозможны! Но не совершенно бесполезны, так как могут служить инструментом при решении реальных задач. И Бомбелли, вдохновленный своим успехом, начал разрабатывать правила операций с комплексными величинами.

Сегодня мы значительно упростили правила Бомбелли путем ведения символа i для обозначения $\sqrt{-1}$. Любое комплексное число можно записать в виде $a + ib$. При такой системе записи решение уравнения, полученное Бомбелли, выглядит следующим образом

$$x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=(2+i)+(2-i)=4.$$

Мы называем эти величины *комплексными числами*, и для того чтобы доказать, что они и в самом деле являются *числами*, мы должны доказать, что они удовлетворяют условиям принципа сохранения. Бомбелли ничего не знал об этом принципе; он руководствовался единственно математическим мышлением, иначе говоря, интуицией. Однако, за исключением формы записи, талантливый итальянец разработал все правила практически в том виде, в котором их учат в наши дни.

Первое условие принципа сохранения удовлетворяется, так как комплексные числа $a + ib$ включают в себя действительные в качестве подмножества (при $b = 0$). Критерий сравнения заключается в условии, что $a + ib$ и $c + id$ равны, если одновременно выполняются равенства $a = c$ и $b = d$, в противном случае они не равны. Что касается критериев больше-меньше, они не так очевидны. Однако неожиданно встретившиеся трудности не слишком серьезны и не заслуживают отдельного упоминания.

Сумма двух комплексных чисел — это комплексное число, полученное в результате сложения отдельно действительных и мнимых частей; то же самое относится и к разности. Произведение двух или более комплексных чисел получается в результате перемножения отдельных чисел в соответствии с обычными алгебраическими правилами и повсеместной заменой степеней числа i в соответствии со следующей таблицей.

$i=\sqrt{-1}$	$i^5=\sqrt{-1}$	$i^9=\sqrt{-1}$	и т.д. и т.п.
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	
$i^3=-i$	$i^7=-i$	$i^{11}=-i$	
$i^4=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$	

Следовательно, операции Бомбелли обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Все условия принципа сохранения удовлетворены. Следовательно, создана область комплексных чисел, которая заняла место области действительных чисел точно так же, как последняя ранее заняла место области рациональной.

Отсюда следует, что в результате выполнения над комплексными числами любой последовательности рациональных операций, получается комплексное число. Другими словами, множество комплексных чисел является замкнутым по отношению к рациональным операциям.

Но замкнуто ли оно также и по отношению к бесконечным процессам анализа? Или, другими словами, можем ли мы расширить понятия бесконечной последовательности, сходимости и предела, так чтобы охватить и комплексные числа? Утвердительный ответ на этот вопрос в девятнадцатом веке дали работы Гаусса, Абеля, Коши и Вейерштрасса, и этот фундаментальный факт сегодня лежит в основе современной теории функций.

Но уже в восемнадцатом веке комплексные числа начали терять свою чисто алгебраическую природу. Знаменитая формула, открытая Муавром, показала, какую важную роль комплексные числа играют в тригонометрии; Эйлер развил формулу Муавра при помощи введения трансцендентного числа *e*. Хотя это и выходит за пределы тем, рассматриваемых в этой книге, я должен ради завершенности упомянуть это удивительное тождество Эйлера

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

в котором некоторые его метафизически настроенные современники усматривали мистическое значение. Действительно, в него входят все наиболее важные символы современной математики, и в нем видели *мистический союз,* где арифметика была представлена 0 и 1, алгебра — символом i, геометрия — π, а анализ — трансцендентным числом e.

Теперь естественно поинтересоваться, является ли аппарат, созданный присоединением комплексных чисел, достаточным для решения фундаментальной задачи алгебры: определения корней уравнения, записанного в общем виде.

Уже Бомбелли знал, что при помощи комплексных чисел можно полностью решить квадратное и кубическое уравнение. Другими словами, уравнение в общем виде второй и третьей степени обязательно имеет по крайней мере один корень, который может быть действительным или комплексным числом. Это следовало из того факта, что формальные решения этих уравнений можно выразить через радикалы второй и третьей степени. Конечно, последние могут включать в себя комплексные числа, но такие радикалы сами могут быть преобразованы в вид $a + ib$.

После того как метод Феррари определил аналогичную процедуру для уравнений четвертой степени (их решения также могут быть выражены комплексными числами), действительные решения стали частным случаем.

Эти факты были известны еще в семнадцатом веке. Также было известно, что мнимые корни алгебраического уравнения с действительными коэффициентами должны составлять пару т.е. если $a + ib$ является решением такого уравнения, то и сопряженное $a - ib$ также будет решением. Из этого следует, что уравнение нечетной степени должно иметь хотя бы один *действительный корень.*

В 1631 году англичанин Томас Гарриот пришел к замечательной идее о представлении любых уравнений в виде многочленов, равных 0. Эта перспективная идея привела его к теореме (в наши дни она называется теоремой о делимости многочленов), что если a является корнем алгебраического уравнения, то $(x - a)$ является сомножителем соответствующего многочлена. Этот фундаментальный факт позволил свести задачу о нахождении корней любого уравнения к задаче о разложении многочлена на множители. Это в свою очередь привело к мысли, что если можно доказать, что любое уравнение имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный, то отсюда следует, что количество корней равно степени уравнения с той оговоркой, конечно, что *каждый корень должен быть сосчитан столько раз, сколько раз соответствующий сомножитель входит в разложение полинома.*

Предположение о том, что утверждение, справедливое для уравнений первых четырех степеней, справедливо и в общем случае, было выдвинуто Жираром в начале семнадцатого века; а в середине восемнадцатого века д'Аламбер сформулировал это утверждение следующим образом: *у любого алгебраического уравнения есть хотя бы один действительный или комплексный корень.* Однако он не смог строго доказать это утверждение, и несмотря на усилия многих математиков оно оставалось недоказанным в течение следующих пятидесяти лет.

Это утверждение напоминало другую формулировку: любое уравнение может быть разрешено в радикалах. Ее также считали очевидной многие математики даже еще во времена Лагранжа. Однако сравнение не корректно: в данном случае обобщение сделано на основе неполной индукции и ошибочность предположения только подчеркнула опасность этого метода. А вот д'Аламбера к его предположению, наоборот, привела интуиция.

Влияние интуиции просматривается во всех доказательствах этой *фундаментальной теоремы алгебры*, которые появлялись со времен д'Аламбера, а именно в неудовлетворительных доказательствах д'Аламбера, Эйлера и Лагранжа; в доказательствах Арганда, предложенных в 1806 и 1816 годах; в четырех доказательства великого Гаусса, окончательно установивших правильность предположения; и во всех последовавших улучшениях этих доказательств.

Все эти доказательства различаются по принципу, но обладают одной общей чертой. Где-то, как-то, иногда открыто, а иногда неявно в них присутствует идея непрерывности, идея, чуждая алгебре, идея, принадлежащая миру математического анализа.

Давайте я объясню это на простом примере. Пусть $Z = z^2 + 1$ и $z = x + iy$, тогда после подстановки мы получим $Z = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$. Значит, когда x и y изменяются непрерывно и могут принимать все возможные значения в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, то и выражения в скобках также могут принимать все возможные значения в том же самом диапазоне. *Доказательство* этого утверждения в общем случае и со всей строгостью достаточно сложно, и именно на него были направлены и безуспешные усилия д'Аламбера и гений Гаусса. Но *почувствовать*, что это так, это совсем другое дело; здесь срабатывает *интуиция бесконечности*. При одних значениях переменных x и y члены многочлена будут принимать положительные значения, при других — отрицательные. Если изменения непрерывны, то существуют промежуточные значения x и y (и фактически их бесконечно много), которые обращают первый член в ноль; и существует другой ряд значений, при которых в ноль обращается второй член. Некоторые пары среди этих двух наборов будут *общими*. Если a и b являются такой парой, тогда $a + ib$ — решение уравнения $Z = 0$. Это именно то, что подсказывает интуиция, и именно это пытался доказать д'Аламбер. Гаусс преуспел там, где д'Аламбер потерпел неудачу, но его мучил тот факт, что его первое доказательство фундаментальной теоремы алгебры зависело от методов анализа. Через шестнадцать лет он придумал другое доказательство. Он показал, что любое уравнение четной степени можно чисто алгебраическими методами свести к уравнению нечетной степени. Фундаментальная теорема была бы доказана, если бы удалось показать, что любое уравнение нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень. Но это последнее утверждение, к сожалению, нельзя доказать, не прибегая к приемам, чуждым чистой алгебре.

Сам факт, что для доказательства фундаментальной теоремы алгебры нужны какие-то процессы, которые выходят за рамки алгебры, подразумевает, что у этой теоремы могут быть более широкие границы. И это на самом деле так. В области комплексных чисел иметь решения могут не только алгебраические уравнения. Такие уравнения, как, например, $e^z + z = 0$ и многие другие, также допускают комплексные решения.

Многочлены составляют только чрезвычайно малую часть класса функций, которые Вейерштрасс назвал *целыми*. Так же как и многочлены, эти функции при соответствующих значениях переменных принимают любые заранее заданные комплексные значения и, в частности, значение ноль. К этому классу принадлежат также наиболее важные трансцендентные функции, такие как синус, косинус и экспонента. С точки зрения теории функций, *целые* функции являются непосредственным расширением понятия многочленов.

Основу теории функции комплексного переменного заложили Коши, Вейерштрасс и Риман, и ей суждено было стать самым важным фактором развития математики в девятнадцатом веке.

Однако давайте вернемся к нашему повествованию.

В 1770 году появилась «Алгебра» Эйлера, в которой было приведено большое количество примеров применения комплексных чисел. Однако в ней мы читаем следующее:

«Все такие выражения, как $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}$ и т.д., являются невозможными или мнимыми числами, так как они представляют корни из отрицательных чисел. О таких числах поистине можно сказать, что они не ничто, и не больше, чем ничто, и не меньше, чем ничто, откуда неизбежно следует, что они мнимые или невозможные».

В 1831 году Гаусс написал:

«Наша общая арифметика, до такой степени превосходящая геометрию древних, полностью создана в наше время. Начавшись исходно с понятия конкретных целых чисел, она постепенно расширила свою область. К целым числам добавились дроби, к рациональным величинам – иррациональные, к положительным – отрицательные, к действительным – мнимые. Однако это продвижение всегда начиналось с робких медленных шагов. Первые алгебраисты называли отрицательные корни уравнений ложными корнями, и это было правильно, когда проблема, которую они решали, формулировалась в таком виде, что тип искомой величины не допускал противоположностей. Но так же как в общей арифметике без колебаний допускаются дроби, хотя есть много перечислимых величин, для которых дробь не имеет смысла, так мы не должны отказывать отрицательным числам в правах, предоставленных положительным, просто потому что многие величины не допускают противоположностей. Реальность отрицательных чисел достаточно оправданна, поскольку во многих других случаях для них обнаруживается соответствующая интерпретация. Это давно уже допустимо, но мнимые числа, — встарь, а иногда и теперь называемые невозможными в противоположность реально существующим величинам, — все еще скорее терпимы, чем полностью освоены; это кажется больше похожим на пустую игру с символами, реальное основание которой без колебаний отвергается даже теми, кто не преуменьшает тот богатый вклад, который эта игра с символами внесла в сокровищницу связей между действительными числами.

Автор в течение долгих лет рассматривал эту чрезвычайно важную часть математики с другой точки зрения, считая, что существование мнимых чисел так же объективно, как и существование отрицательных величин, но до настоящего времени у него не было возможности опубликовать свои взгляды».

Что же произошло за те шестьдесят лет, которые разделяют эти два высказывания? Почему так сильно изменились взгляды? Сам Гаусс так отвечает на эти вопросы: «Этим мнимые сущности могут быть признаны действительно существующими». Другими словами, их конкретная интерпретация аналогична отождествлению отрицательных чисел с изменением направления.

Чтобы хорошенько понять эту интерпретацию, мы должны оглянуться назад в семнадцатое столетие и внимательно изучить дисциплину, к которой я постоянно обращался в предыдущих главах, — аналитическую геометрию.

Обычно, когда говорят о том, что наука сильно меняет нашу жизнь, в виду имеют физику или химию. У нас есть ощутимые свидетельства того, как громадное количество изобретений в механике коренным образом изменило промышленность и транспорт. Появление электричества облегчило монотонный домашний труд, и благодаря ему коммуникации в своем развитии поднялись на невообразимый уровень. Достижения химии позволили превратить бесполезные до того времени материалы в источники средств для существования, отдыха и развлечений. Все это научило людей уважать эти науки и восторгаться их успехами.

Из-за большей разбросанности менее очевидными являются преимущества, которыми одаривает нас математика. Конечно, мы знаем, что математика сыграла свою роль в теориях, которые сделали возможными все эти открытия, так же как и в воплощении открытий в жизнь. Но это дело специалистов. В то время как в повседневной жизни человек может извлечь пользу из того, что знает, из каких элементов состоит вода или чем отличаются короткие и длинные волны, изучение геометрии или математического анализа мало способствует его благополучию.

Однако среди многих достижений математики есть и несколько таких, которые даже в самом непосредственном смысле могут рассматриваться как полезные изобретения, поскольку они проникли в повседневную жизнь людей. К ним можно отнести позиционную систему записи чисел, которая сделала вычисления общедоступными; непосредственно полезной оказалась также символьная запись алгебраических выражений, особенно *logistica speciosa* (т.е. использование букв для обозначения неопределенных величин) Виета, благодаря которой люди получили в свое распоряжение сокращенные формы записи общих соотношений, до того доступные лишь немногим. К этой же категории относится и замечательное изобретение, подаренное миру Декартом, – *аналитический график*, который позволяет *графически* отобразить *закон*, управляющего явлением, или *корреляцию*, существующую между зависимыми событиями, или *изменения*, которым ситуация подвергается с течением времени.

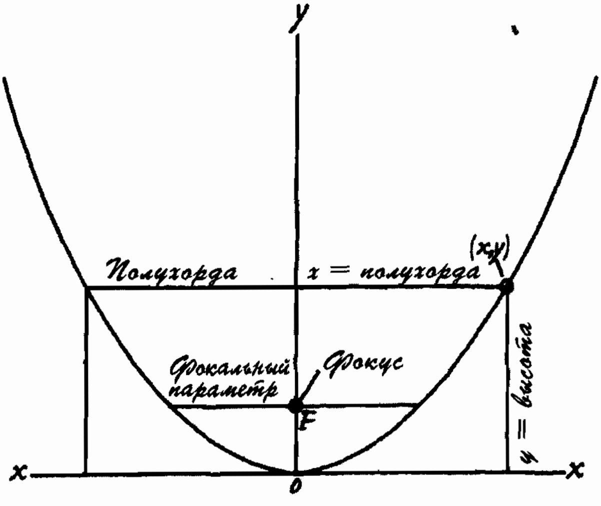
Примечательно, но именно те математические изобретения, которые проще всего воспринимаются обычными людьми, также оказывают наибольше влияние на развитие чистой математики. Принцип позиционной записи чисел привел к появлению *нуля*, без которого не возникло бы понятия отрицательных чисел; только благодаря ему появилась возможность стандартизации уравнений и затем доказательство теоремы о делимости многочлена. Буквенная запись преобразила математику – произошел переход от изучения частностей к обобщениям, а символьное обобщение «невозможного» открыло дорогу для общей концепции числа.

Наконец, изобретение Декарта не только создало такую важную дисциплину, как аналитическая геометрия, но и дало Ньютону, Лейбницу, Эйлеру и Бернулли механизм, отсутствие которого помешало Архимеду, а позже Ферма внятно выразить свои глубокие и перспективные мысли.

«Proles sine matre creata»

«Дети, рожденные не матерью». Такими словами геометр Шаль охарактеризовал достижение Декарта. С равной несправедливостью ко всему предшествующему то же самое могло быть сказано о принципе позиционной записи чисел или символьном обозначении. Историю записи чисел мы проследили до пустой полоски на счетной доске, и также мы видели, что символьная запись — это просто развитие риторического символизма, который математики и те, кто занимался расчетами, использовали с незапамятных времен.

Точно так же великое изобретение Декарта уходит корнями в знаменитые задачи античности, которые появились еще во времена Платона. После того как циркуль и линейка не смогли помочь в решении задач о трисекции угла, удвоении куба и вычислении квадратуры круга, греческие геометры стали искать новые кривые. Они наткнулись на *конические сечения*, т.е. на кривые, которые могут получиться при сечении плоскостью кругового конуса. К этим кривым относятся *эллипс*, *гипербола* и *парабола*. Их красивые свойства так привлекали греческих геометров, что скоро эти кривые начали изучать ради них самих. Великий Апполоний написал трактат, в котором описал и продемонстрировал наиболее важные свойства этих кривых.



Замаскированная аналитическая геометрия: рассмотрение Аполлонием из Перги параболы

В этом труде можно найти ядро того метода, который Декарт затем возвел в принцип. Аппполоний описал параболу через ось и касательную к вершине и показал, что величина полухорды является средним пропорциональным между фокальным параметром и высотой сегмента. Сегодня мы записываем это соотношение в виде уравнения в декартовых координатах $x^2 = Ly$, называя высоту *ординатой* (y), а полухорду *абсциссой* (x); фокальный параметр является коэффициентом при y, в данном случае он обозначен как L.

Интересно, что греки называли эту и многие другие открытые ими кривые *loci* (т.е. местоположение или геометрическое место точек); они описывали эти кривые как *место* всех точек, положение которых может быть измерено по отношению к некоторой фиксированной системе отсчета. Так, например, эллипс был *местом* (*locus*) точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек была постоянной. Такое описание есть не что иное, как *риторическое уравнение* кривой, поскольку позволяет для любой заданной точки плоскости определить, принадлежит ли она к этой кривой.

На самом деле, именно в таком виде эти соотношения использовал Омар Хайям, когда нашел графическое решение кубического уравнения посредством двух конических сечений. В дальнейшем эти методы совершенствовали итальянские математики эпохи Возрождения и Франсуа Виет. Фактически именно подобная проблема привела его к развитию *logistica speciosa*.

В заключение следует обратить внимание на этот отрывок из работы Ферма, написанной в 1629 году, но опубликованной только сорок лет спустя, через тридцать лет после появления «Геометрии» Декарта:

«Всякий раз, когда в заключительное уравнение входят две неизвестные величины (quantitates ignotae), налицо имеется *место*, и конец одной из неизвестных величин описывает прямую или же кривую линию. Прямая линия простая и единственная, а вот кривых неопределенно много: окружность, гипербола, парабола, эллипс и т.д.

...Для установления уравнений удобно расположить обе неизвестные величины под некоторым заданным углом (который мы большей частью принимаем прямым)».

Нет, геометрия Декарта никоим образом не ребенок без матери. Рискуя показаться смешным, я все же скажу, что у концепции Декарта не только есть мать – геометрия греков, но есть и брат-близнец. Даже поверхностное сравнение «Геометрии» Декарта и «Введения» Ферма обнаруживает, что перед нами очередной пример парных событий, которыми так богата история математики. В том же веке и фактически в том же поколении произошли открытия Дезаргом–Паскалем проективной геометрии и Паскалем–Ферма принципов математической теории вероятностей. Но такие события происходили не только в семнадцатом веке. В восемнадцатом веке аналогичный случай произошел с Ньютоном и Лейбницем; девятнадцатый век стал свидетелем почти одновременного открытия Гауссом, Весселем и Аргандом способа интерпретации комплексных величин; практически одновременно появились концепции неевклидовой геометрии Лобачевского, Больяи и Гаусса; а в конце века Кантор и Дедекинд определили континуум.

Аналогичные примеры существуют и в других науках. Похожие концепции практически одновременно возникают в головах двух или даже большего количества людей. Во многих случаях этих людей разделяют тысячи миль, они принадлежат к совершенно различным национальностям и даже не знают о существовании друг друга. Разница в темпераменте, внешнем окружении и мировоззрении двух таких людей, как Декарт и Ферма, поразительна. Как можно объяснить такое странное явление? Кажется, что накопленный человечеством опыт в какой-то момент достигает такого уровня, что начинает выплескиваться через край, и тогда просто дело случая, на кого падет жребий – на одного, двух человек или на всю массу людей.

Ни Ферма, ни Декарт не осознали всю значимость своего открытия. Они оба интересовались созданием единого принципа геометрии: Ферма с точки зрения математика, Декарт – как философ. В греческой геометрии, которая нашла свое окончательное выражение в работах Евклида и Апполония, такого единства не было: каждая теорема, каждое построение казалось скорее художественным произведением, чем реализацией общего принципа. Какие идеи лежат в основе того или иного построения? Почему некоторые задачи можно разрешить при помощи одной линейки, а для других необходим еще и циркуль, а некоторые задачи даже греки, признанные мастера работы с циркулем и линейкой, не смогли решить при помощи этих инструментов? Эти и другие аналогичные вопросы волновали математические умы того времени, в том числе Ферма и Декарта.

Они начали искать ключ к этим загадкам в алгебре, поэтому они *алгебраически* стали решать проблемы геометрии, в результате чего и появилась геометрия аналитическая. Они заложили основу процедуры, при помощи которой геометрическую задачу можно свести к рутинным алгебраическим манипуляциям. Таким образом, знаменитые задачи античности, которые начинали свое существование в легендарном величии и на протяжении многих столетий были источником очарования, привлекавшим множество математиков всех уровней, теперь были лишены своей прелести прозаичным утверждением Декарта о том, что любая задача, которая сводится к уравнению первой степени, может быть решена геометрически при помощи одной только линейки, а построение при помощи циркуля и линейки эквивалентно решению квадратного уравнения; но если задача приводит к *неприводимому* уравнению степени выше второй, то ее геометрическое решение при помощи только циркуля и линейки невозможно.

Декарт (то же самое, конечно, относится и к Ферма) не осознавал, что он закладывает основы новой математики; его открыто признаваемой целью была систематизация геометрии античности. В этом, действительно, заключалась роль, которую семнадцатое столетие сыграло в истории математики: это был *век искоренения* античной математической культуры. В работах Галилея, Ферма, Паскаля, Декарта и других я вижу завершение исторического процесса, который не мог достичь своей наивысшей точки в период общего спада. Безразличие римлян и долгое средневековье с его религиозным обскурантизмом препятствовало продолжению этого процесса на протяжении пятнадцати веков.

В то же время, устранив обломки древней математики, гений этих людей подготовил почву для новой науки. Важнейшими характерными чертами современной математической мысли являются *постоянство формальных законов* и *принцип соответствия*. Первое привело к обобщенной концепции числа, а второе позволило установить общность между, казалось бы, отдаленными и непохожими разделами математики. И хотя Декарт был далек от хотя бы приблизительного понимания этих двух фундаментальных принципов современной математики, но созданная им аналитическая геометрия содержала все, что было необходимо для развития этих принципов.

Здесь была алгебра, которая неявно допускала использование иррациональных чисел наравне с рациональными. Она была применена для решения классических задач геометрии: последовательные и методичные приемы этой алгебры приводили к тем же самым результатам, которые греки – несмотря на свою приверженность к крайней строгости и препятствовавший им страх перед иррациональными числами и бесконечностью – получили гениальными, но бессистемными методами. Этот факт сам по себе придал рассуждениям Декарта чрезвычайную убедительность, так как успех влечет за собой новый успех.

Кроме того, аналитическая геометрия являлась первым в истории математики примером установления связи между двумя областями математики, не только различными по своей природе, но и, как известно, с самого начала развития математики конфликтующими друг с другом, – *арифметикой* и *геометрией*. Этот аспект не был замечен ни Ферма, ни Декартом, ни их современниками, но в течение следующих двух столетий ему было суждено оказать огромное влияние на развитие математической мысли.

В предыдущей главе я говорил, что Декарт неявно предполагал, что существует взаимнооднозначное соответствие между действительными числами и точками оси. Он предполагал даже более того: по умолчанию, так как это казалось таким естественным, что об не стоило даже говорить, он принимал без доказательств, что *между точками плоскости и множеством всех пар действительных чисел можно установить взаимнооднозначное соответствие.* Таким образом аксиома Дедекинда-Кантора, расширенная на два измерения, была неявно включена в дисциплину, которая была создана за двести лет до того, как Дедекинд или Кантор появились на свет. Эта дисциплина стала испытательным полигоном для всех достижений следующих двух столетий: математического анализа, теории функций, механики и физики. И поскольку в этой дисциплине ни разу не было выявлено ни одного противоречия, а также из-за ее способности выдвигать новые проблемы и предвидеть результаты, где бы ни применялась аналитическая геометрия, она скоро становилась одним из самых необходимых инструментов исследований.

Возьмите две перпендикулярные оси, присвойте каждой из них направления. Теперь каждая точка в плоскости осей может быть представлена двумя числами. Каждое из них может быть положительным, отрицательным или нулем, рациональным или иррациональным. Эти числа являются *мерами* расстояния от данной точки до осей отсчета; знак перед каждым из чисел, плюс или минус, зависит от того, в каком *квадранте,* определяемом осями, находится точка.

Этот способ так прост и естественен, что трудно поверить, что потребовалось три тысячи лет, чтобы его изобрести. Это так же удивительно, как и в случае с принципом позиционной системы счисления. Она неявно встроена в структуру нашего языка чисел, и все же понадобилось пять тысяч лет, чтобы ее открыть. Принцип координат является прямым следствием симметричной структуры нашего тела, и он использовался для описания взаимного положения тел с незапамятных времен. Кажется, единственное, что необходимо для получения полноценной *координатной* геометрии, это добавить количественные значения к понятиям *право* и *лево*, *вперед* и *назад*, *вверх* и *вниз*.

В самом деле, этот принцип использовался издавна: мы обнаруживаем его в старых волшебных сказках, которые описывают расположение сокровищ в виде инструкций тому, кто ищет: столько-то шагов на восток и затем еще сколько-то на север и т.д. Древнеегипетские землемеры явно применяли его, прокладывая с юга на север и с востока на запад линии и привязывая любой объект к этим осям.

Конечно, для перехода от этой практической процедуры к аналитической геометрии потребовалось изобретение нуля и концепции отрицательных чисел. Но они были известны в Европе еще со времен Фибоначчи. Почему же тогда метод координат не появился в математике раньше? Ответ можно найти в огромном влиянии, которое мнение греков оказывало на европейское мышление. Освобождение концепции числа от тормозящего влияния греков было не такой простой задачей, как это сегодня может показаться.

В геометрии Декарта каждой точке плоскости присваивается пара действительных чисел и любой паре действительных чисел – точка на плоскости. Множество пар действительных чисел отождествляется с точками плоскости. От этих представлений остается только один шаг до того, чтобы рассматривать точку как *особенное число*, единственное число. Но и на этот шаг потребовалось почти двести лет.

В 1797 году неизвестный норвежский землемер Вессель представил Датской Академии наук доклад о геометрической интерпретации комплексных чисел. Этот доклад прошел незамеченным и только через сто лет действительно стал известен научному миру. В том же самом 1797 году двадцатилетний Гаусс защищал свою докторскую диссертацию на тему о фундаментальной теореме алгебры, в которой неявно использовал геометрическое представление комплексной области. В 1806 году Робер Арганд, неизвестный парижский бухгалтер, швейцарец по происхождению, опубликовал работу по геометрической интерпретации комплексных чисел. И снова это событие осталось незамеченным до тех пор, пока через десять лет эта работа не была повторно опубликована в солидном математическом журнале. Наконец, в 1831 году Гаусс в своей работе, цитата из которой приведена ранее, совершенно определенно высказался о *математической эквивалентности плоскости декартовой геометрии и множества комплексных чисел.*

В соответствии с этой формулировкой, в принципе такой же как у Весселя и Арганда, действительное число представляет собой точку на оси x декартовых координат. Если a такое число (см. рисунок), А — представляющая его точка на оси x, тогда умножение на i эквивалентно повороту *вектора* ОА против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$; таким образом, число ia представлено точкой А′ на оси y. Если это число еще раз умножить на i, мы получим $i^2a = -a$, а этому числу соответствует точка А″ на оси x, и т.д., и т.д. Четыре последовательных поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ вернут точку в ее первоначальное положение. Это и есть геометрическая интерпретация соотношений, приведенных на с. 163—164.

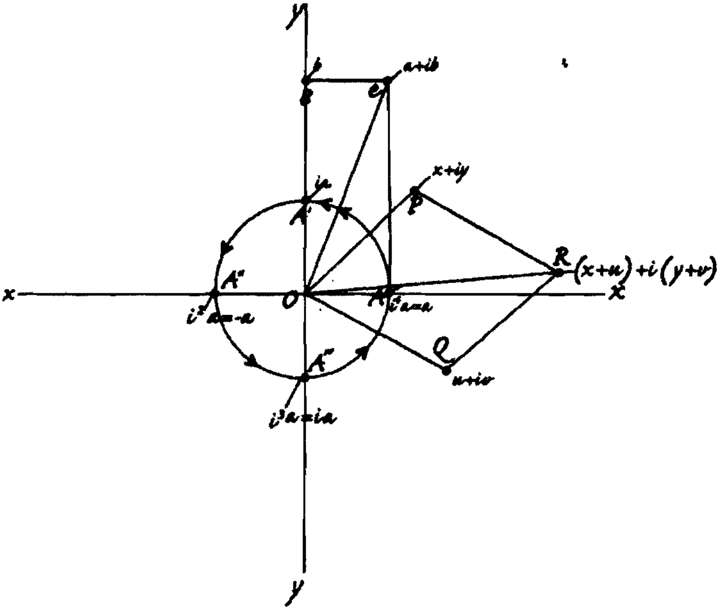


График Гаусса-Арганда

Более того, сложение $a + ib$ интерпретируется как *сложение векторов* ОА и ОВ, где точка А соответствует действительному числу a, а точка В — чисто мнимому числу ib. Следовательно числу $a + ib$ соответствует точка С — конец диагонали прямоугольника, построенного на векторах ОА и ОВ, как на сторонах ОА и ОВ. *Значит, комплексному числу $a + ib$ в декартовых координатах сопоставляется точка с абсциссой a и ординатой b.*

Сложению двух комплексных чисел, представленных соответственно точками Р и Q, соответствует сложение двух векторов ОР и OQ *по правилу параллелограмма.* Умножение на действительное число, например на 3, означает *удлинение* вектора ОР в 3 раза. Умножению на i соответствует поворот против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$ и т.д. и т.д.

Все подробности этих операций показаны на примере, приведенном на рисунке.

Открытие такой конкретной интерпретации придало фантомным созданиям Бомбелли плоть и кровь; в *комплексных* числах *воображаемое* было вытеснено *изображением.*

Это открытие вместе с появившимся в то же время доказательством, что любое алгебраическое уравнение, а также любое уравнение из широкого класса трансцендентных уравнений допускает решение в комплексных числах, произвело настоящую революцию в математике.

В математическом анализе Коши, Вейерштрасс, Риман и многие другие расширили весь аппарат бесконечных процессов на область комплексных чисел. Так была основана теория функций комплексного переменного со всеми ее далеко идущими последствиями для математического анализа, геометрии и математической физики.

В геометрии Понселе, Фон Штаудт и другие использовали комплексные числа в качестве отправной точки для разработки общей проективной геометрии; Лобачевский, Больяи, Ли, Риман, Кэли, Клейн и многие другие открыли обширную область неевклидовой геометрии. Применение комплексных чисел к геометрии бесконечно малых в конечном итоге выросло в абсолютную дифференциальную геометрию, основу современной теории относительности.

В теории чисел Куммер разработал метод комплексных делителей, которые он назвал *идеальными* числами, и, таким образом, достиг невообразимых ранее успехов в том, что касается задачи Ферма и родственных вопросов.

Этот колоссальный успех способствовал некоторым обобщениям, которые развивались в двух направлениях. Во-первых, рассматривался вопрос, можно ли использовать такие комплексные числа, которые подчинялись бы другим законам, а не $i^2 = -1$. Этому вопросу было посвящено много работ, но к нашему исследованию они отношения не имеют. Во-вторых, естественно возник вопрос, могут ли точки трехмерного пространства так же рассматриваться, как отдельные числа? Изучение этого вопроса привело к появлению новой дисциплины, которая в итоге стала *векторным анализом*, который играет такую важную роль в современной механике. В результате этого изучения также появилась теория *кватернионов*, разработанная Гамильтоном, и близкая к ней теория Грассмана об *экстенсивных величинах*.

Эти обобщения выявили важный факт, который заключается в том, что расширения за пределы области комплексных чисел *возможны только за счет принципа постоянства*. Область комплексных чисел является последним рубежом этого принципа. За этим пределом приходится жертвовать или коммутативностью операций, или той ролью нуля, которую он играет в арифметике.

Это привело к необходимости начать исследование свойств операций в общем. Принцип постоянства после этого был расширен за счет отбрасывания некоторых ограничений. Результатом стало построение имеющей большие перспективы теории матриц; теории, в которой целый массив элементов рассматривается как отдельное число. Эти «заполненные блоки» складываются и перемножаются, и вообще все разработанное матричное исчисление можно рассматривать как продолжение алгебры комплексных чисел. Позже была найдена потрясающая интерпретация этих абстрактных объектов в квантовой теории атома и во многих других областях науки.

Так в общих чертах выглядит история комплексных чисел. Столетиями они играли роль мистической связи между разумом и воображением. По словам Лейбница:

«Божественный дух нашел чудесное убежище в этом чуде анализа, знамении идеального мира, почти амфибии между бытием и небытием, которое мы называем мнимым корнем из отрицательного числа».

Другие считали комплексные числа бессодержательной игрой символами, которая по каким-то необъяснимым причинам приводит к реальным результатам. Комплексные числа были полезными, и это оправдывало их существование, как цель, которая оправдывает средства. Благодаря им, появился метод и возможность предвидеть результат многих, иначе неприступных задач. Итак, этих фантомов часто призывали, но всегда с опасением.

И наконец, пришел день, когда было показано, что эти фантомы, придуманные Бомбелли, совсем не бесплотны, но являются такими же реальными созданиями, как и действительные числа. Более того, эти комплексные сущности как бы дважды реальны: с одной стороны, они подчиняются законам арифметики, в силу чего являются полноправными числами. С другой стороны, они нашли свое воплощение в точках на плоскости. Благодаря этому они являются идеальным инструментом для перевода на язык чисел запутанных взаимосвязей между геометрическими формами на плоскости.

Когда все это было претворено в жизнь, процесс *арифметизации геометрии*, непреднамеренно начатый Декартом и Ферма, стал свершившимся фактом. Итак, именно комплексные числа, которые начали свое существование как *символы вымысла*, в конце концов стали важнейшим инструментом для формулировки математических идей, мощным аппаратом для решения запутанных задач и средством установления связей между отдаленными математическими дисциплинами.

Мораль: *вымысел – это форма поиска интерпретации.*

ГЛАВА 11

АНАТОМИЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ

> Сущность математики заключена в ее свободе.
>
> *Георг Кантор*

На первый взгляд мысль измерить, *насколько многочисленно* бесконечное множество, кажется достаточно странной. Но даже у того, кто мало знаком с математическими идеями, есть смутное ощущение, что бывают бесконечности *и* бесконечности — термин *бесконечность*, который употребляется в связи с натуральным рядом чисел, принципиально отличается от термина *бесконечность*, применяемого к точкам прямой.

Это смутное представление о «содержимом» бесконечной совокупности можно сопоставить с сетью. Так, если мы забросим сеть с единичной ячейкой, то выловим целые числа, а все остальные числа пройдут сквозь эту сеть. Если после этого мы возьмем сеть с ячейкой в 1/10, затем в 1/100, то, продолжая этот процесс, мы будем вылавливать все больше и больше рациональных чисел. Мы сознаем, что нет предела измельчению сетки, так как, насколько бы частую сеть мы ни забросили, существует еще более частая, которую мы *могли бы* забросить. Дайте своей фантазии волю, и вы сможете представить себе самую последнюю сеть, настолько плотную и с ячейками настолько мелкими, что с ее помощью удастся выловить *все* рациональные числа.

Если мы доведем эту аналогию до предела и начнем рассматривать такую предельную сеть как нечто неизменное, как если бы она была фиксированной, мы легко устраним все противоречия, так талантливо выявленные Зеноном. Однако тогда мы столкнемся со следующей трудностью.

Этой самой последней сетью, даже если бы она материализовалась, все же не удалось бы выловить *все числа*. Сеть должна быть еще более «плотной», если необходимо позаботиться об алгебраических иррациональных числах; но даже с помощью этой «алгебраической» сети не удастся выловить трансцендентные числа. Поэтому мы интуитивно считаем, что множество рациональных чисел более плотно, чем множество натуральных чисел; алгебраические числа размещены в еще более плотной структуре и, наконец, область действительных чисел, арифметический континуум, *самая плотная среда*, среда без пробелов, сеть с нулевой ячейкой.

Если теперь мы узнаем, что Георг Кантор предпринял реальную попытку классифицировать бесконечные совокупности и наделить каждую числом, отражающим их численность, мы, естественно, сразу же предположим, что ему удалось найти меру этой непостоянной плотности.

И все же, несмотря на наше предвидение, в результатах Кантора нас ожидает множество сюрпризов, некоторые из них так удивительны, что граничат с абсурдом.

Попытка измерить плотность совокупности при помощи сети обречена на провал, поскольку по сути своей этот способ физический, а не арифметический. Он не арифметический, поскольку не построен на принципе соответствия, на котором основана вся арифметика. Классификация *действительно бесконечного*, т.е. различных видов «численности» бесконечных совокупностей, если она вообще возможна, должна происходить по тому же принципу, что и классификация численности конечных совокупностей.

Как мы видели в первой главе, *для человеческого мышления* не характерно представлять *абсолютную численность*. Натуральные числа или, точнее, числа, определяющие количество, ведут свое начало от способности человека сопоставлять, что позволяет нам устанавливать соответствие между двумя наборами. Такие понятия, как *больше*, *меньше* или *равно*, появились раньше, чем числа. Мы учимся *сравнивать* до того, как учимся *вычислять*. Арифметика не начинается с чисел, она начинается с *критериев*. Научившись применять критерии сравнения равно-больше-меньше, человек делает следующий шаг, заключающийся в поиске моделей для каждого *варианта* численности. Эти модели хранятся у него в памяти точно так же, как стандартный метр хранится в Палате мер и весов в Париже. Один, два, три, четыре, пять... или вместо этого мы могли бы использовать: я, крылья, клевер, ноги, рука... Так или иначе, известно, что именно из второй последовательности родилась современная форма представления чисел.

Принцип соответствия породил целые числа и, благодаря целым, господствует во всей арифметике. Если действовать аналогично, то, прежде чем измерять «численность» бесконечных множеств, мы должны научиться сравнивать их. Но как? Используя тот же способ, что и для конечных множеств. Процесс сопоставления, сыгравший, возможно, решающую роль в конечной арифметике, может быть распространен и на *арифметику бесконечности* — ведь элементы двух бесконечных множеств также можно сопоставлять один с другим.

О возможности установления соответствия между двумя бесконечными совокупностями упоминается в диалогах Галилея, первом историческом документе по вопросу бесконечных множеств. Я приведу здесь дословно отрывок книги, озаглавленной «Диалог о новых науках», которая появилась в 1636 году. В этом диалоге участвуют три человека. Сагредо представляет практическую точку зрения, Симплицио олицетворяет школу схоластов, а Сальвати, скорее всего, это сам Галилей.

«*Сальвати:* Это одна из тех трудностей, которые возникают, когда мы пытаемся своими конечными умами охватить бесконечность, присваивая ей те же свойства, что и конечным, ограниченным совокупностям. Но я думаю, что это неправильно, поскольку мы не можем говорить, что одна бесконечная величина больше, или меньше, или равна другой. Чтобы доказать это, у меня есть доводы, и я для большей ясности изложу их в виде вопросов к Симплицио, который и затронул эту трудность.

Я полагаю, ты знаешь, какие числа являются квадратами, а какие нет.

Симплицио: Конечно, я знаю, что квадраты — это числа, которые получаются в результате умножения числа на самого себя; таким образом, 4, 9 и т.д. — это квадраты, которые получились при умножении 2, 3 и т.д. на самих себя.

Сальвати: Очень хорошо. Ты также знаешь, что в то время как произведения называются квадратами, сомножители называются сторонами или корнями. А с другой стороны, те числа, которые не являются произведением двух равных сомножителей, квадратами не являются. Следовательно, если я утверждаю, что всех чисел, включающих как квадраты, так и не-квадраты, больше, чем квадратов, то я не ошибаюсь, ведь так?

Симплицио: Совершенно верно.

Сальвати: Если же я спрошу, сколько всего существует квадратов, то правильно было бы ответить, что их существует столько же, сколько и соответствующих квадратных корней, поскольку каждый квадрат имеет свой собственный корень, а для каждого квадратного корня есть свой собственный квадрат, и ни у одного квадрата нет больше одного корня, и ни у одного корня нет больше одного квадрата.

Симплицио: Именно так.

Сальвати: Но если я спрошу, сколько всего существует квадратных корней, нельзя отрицать, что их так же много, как и чисел, поскольку каждое число это корень некоторого квадрата. Но в этом случае мы должны сказать, что квадратов столько же, сколько и чисел, потому что они так же многочисленны, как и их корни, и все числа являются корнями. Однако в начале мы сказали, что чисел значительно больше, чем квадратов, так как значительная часть чисел квадратами не является. Более того, относительное количество квадратов уменьшается по мере продвижения к большим числам. Так, до 100 есть десять квадратов, т.е. они составляют одну десятую часть всех чисел; до 10000 квадраты составляют только одну сотую часть всех чисел; а до миллиона – только одну тысячную часть. Но с другой стороны, нам пришлось бы допустить что среди бесконечного количества чисел, если мы можем себе это представить, существует столько же квадратов, сколько и всех вместе взятых чисел.

Сагредо: И какой же мы можем сделать вывод при таких обстоятельствах?

Сальвати: Насколько я понимаю, мы можем заключить только, что количество квадратов бесконечно и количество квадратных корней бесконечно; ни количество квадратов не меньше, чем общее количество всех чисел, ни второе не больше, чем первое; и, наконец, такие определения, как «больше», «меньше» или «равно», неприменимы к бесконечным, а только к конечным величинам.

Когда затем Симплицио представляет несколько отрезков различной длины и спрашивает, как это возможно, что более длинный отрезок не содержит больше точек, чем короткий, я отвечаю ему, что один отрезок не содержит больше или меньше или столько же точек, сколько и другой, но каждый отрезок содержит бесконечное количество точек».

Но парадокс Галилея, очевидно, не произвел впечатления на его современников. В течение двухсот лет в этой области ничего не было сделано. Только в 1820 году в Германии появился небольшой трактат Больцано, озаглавленный «Парадоксы бесконечности». Он тоже привлек немного внимания; собственно, настолько мало, что, когда через пятьдесят лет теория множеств стала одной из наиболее актуальных тем, мало кто помнил об этой работе.

Сегодня вклад Больцано представляет чисто исторический интерес. Хотя он первым начал обсуждение *актуально бесконечного*, далеко он не продвинулся. И все же необходимо воздать должное человеку, который ввел такое крайне важное понятие, как *мощность* множества, о чем я коротко расскажу далее.

Современная *теория множеств* начинается с Георга Кантора. Его работа «О бесконечных линейных точечных многообразиях», появившаяся в 1883 году, легла в основу новой отрасли математики. В этой работе он впервые оперировал с актуально бесконечным как с вполне определенным математическим объектом. В небольшом отрывке из этой работы ясно виден подход Кантора к данной проблеме:

«По традиции бесконечность рассматривают как неопределенно возрастающую величину или как нечто очень близкое сходящейся последовательности, как это было принято в XVII веке. Напротив, я представляю себе бесконечное в определенной форме как нечто законченное, допускающее не только математические формулировки, но и определение с помощью числа. Эта концепция бесконечности находится в противоречии с традиционной, которую я очень ценю, и я против своей воли вынужден принять эту точку зрения. Но многие годы теоретических размышлений и проверок указывают, что этот вывод логически необходим, и поэтому я уверен, что не существует таких веских возражений, на которые я не был бы в состоянии дать ответ».

Чтобы в полной мере оценить то мужество, которое потребовалось, чтобы так открыто порвать с традициями прошлого, необходимо хорошо представить себе всеобщий подход поколения Кантора к *актуально бесконечному*. Поэтому я процитирую здесь письмо великого Гаусса к Шумахеру, которое, хотя и было написано в 1831 году, отражало настроение математического мира на протяжении всех последующих пятидесяти лет:

«Что касается Вашего доказательства, я прежде всего протестую против пользования бесконечною величиною как завершенною, что в математике никогда не позволено. Бесконечность есть лишь некий способ выражаться, краткая форма утверждения, что существуют границы, к которым определенные отношения подходят как угодно близко, в то время как другим дозволяется расти без ограничения...

Никаких противоречий не возникает до тех пор, пока человек не начинает считать бесконечность чем-то постоянным и пока у него не появляется привычка считать бесконечность ограниченной».

Идеи Гаусса разделялись всеми, поэтому нетрудно вообразить, какая буря в лагере ортодоксов поднялась после открытого вызова Кантора. Не то чтобы актуальную бесконечность под той или иной маской не использовали во времена Кантора, но подход к этим вопросам напоминал отношение джентльменов из южных штатов к прелюбодеянию – они скорее совершат его, чем произнесут это слово в присутствии леди.

Хорошо, что зрелые убеждения Кантора только укреплялись под натиском противников, так как в течение многих последующих лет ему пришлось вести борьбу в одиночку. И какую борьбу! В истории математики нет ничего, что было бы сравнимо по накалу страстей. Сюжет о зарождении теории множеств показывает, что даже в такой абстрактной области, как математика, человеческие чувства нельзя не учитывать.

Кантор начал с того, на чем остановился Галилей. Да, можно установить соответствие между двумя бесконечными совокупностями, даже если одна из них является всего лишь частью другой! Следовательно, для определенности мы будем говорить, что два множества, *конечных* или *бесконечных*, эквивалентны, или *равномощны*, если возможно установить поэлементное соответствие между ними. Если же *мощность двух множеств различна*, тогда процесс установления соответствия приведет к исчерпанию элементов в одном множестве, тогда как во втором еще останутся элементы, для которых не нашлось соответствующих элементов в первом множестве. Другими словами, первое множество может быть сопоставлено с некоторой частью второго множества, но второе не может быть сопоставлено ни с какой частью первого. В этом случае говорят, что мощность второго множества *больше*, чем первого.

Если (A) и (B) – две конечные совокупности, в каждой из которых содержится одинаковое количество элементов, то очевидно, что они равномощны. И наоборот, если (A) и (B) – два равномощных конечных множества, то их характеризует одно и то же *количественное* числительное. Если мощности двух конечных множеств не равны, то множеству с большей мощностью соответствует большее число. *Поэтому для конечных множеств концепция мощности совпадает с концепцией количества.* Теперь, поскольку в *арифметике конечного* понятие мощности может быть отождествлено с количественным числительным, возникает естественный вопрос: можно ли отождествить мощность бесконечных множеств с числами более высокого порядка, как бы *трансфинитными* числами, и с помощью этого нового понятия создать *трансфинитную арифметику*, арифметику бесконечного.

Если мы будем следовать аналогии, предлагаемой началами арифметики конечного, то нам понадобятся модельные множества, каждое из которых могло бы представлять типичное «количество». И такие множества не нужно долго искать: натуральный ряд, область рациональных чисел, поле алгебраических чисел, арифметический континуум — все эти бесконечные множества, ставшие такими привычными из-за постоянного использования, прекрасно подходят в качестве стандартов для сравнения. Давайте теперь сопоставим этим стандартным множествам символы, которые будут играть в трансфинитной арифметике такую же роль, какую их аналоги, конечные количественные числа, играют в арифметике конечного.

Эти символы Кантор назвал *трансфинитными кардинальными (т.е. количественными) числами*. Он упорядочил их в «последовательность» по возрастанию мощности; он определил для этих абстрактных величин операции сложения, умножения и потенцирования; он показал, как они объединяются одно с другим и с конечными количествами. Короче говоря, этим иллюзорным созданиям гения Кантора присуще столько свойств конечных величин, что кажется вполне естественным распространить на них название «числа». И все же одним очень важным *свойством они не обладают, и это свойство — конечность*. Это последнее утверждение звучит тривиально, но в нем нет ни капли тривиальности. Все парадоксальные суждения, которые я собираюсь представить, следуют из того факта, что эти математические создания, которые так похожи на числа, лишены наиболее элементарного свойства, присущего обычным числам. Одно из самых поразительных следствий из их определения заключается в том, что часть множества не всегда меньше целого; они могут быть равны.

Часть может иметь такую же мощность, как и целое. Это уже больше похоже не на математику, а на теологию. И в самом деле, этой идеей занимались многие теологи и люди близкие к теологии. В книгах на санскрите, где религия так тесно переплетается с философией, математикой и наставлениями по занятию сексом, такая мысль вполне заурядна. Поэтому Бхаскара, рассуждая о природе числа 1/0, говорит, что оно «как бесконечное неизменное божество, которое не подвержено изменениям, когда старые миры разрушаются или новые создаются, когда неисчислимые виды созданий рождаются или гибнут».

«Часть может иметь такую же мощность, как и целое». В этом заключается суть парадокса Галилея. Вопрос, который обошел Галилей, заявив, что «такие признаки, как равно, больше или меньше, неприменимы к бесконечным, но только лишь к конечным величинам», именно этот вопрос стал отправной точкой для Кантора в его теории множеств.

А вот Дедекинд пошел даже дальше. Согласно Дедекинду — это характерная особенность всех бесконечных множеств, что в них входят части, которые могут быть сопоставлены со всем множеством. Например, рассмотрим бесконечную последовательность, упорядоченную и соответственно помеченную. Теперь выбросим любое конечное количество элементов в начале и перенумеруем урезанную последовательность. Каждому элементу второй последовательности может быть сопоставлен элемент с таким же номером в первоначальной последовательности, и наоборот. Значит, соответствие является взаимнооднозначным, и две последовательности имеют одинаковую мощность; но при этом нельзя отрицать, что вторая — это только часть первой. Это возможно исключительно для бесконечных множеств, поскольку характерной особенностью именно *конечных* множеств является то, что целое никогда не равно части.

Но вернемся к теории Кантора. Обозначим символом *a* мощность множества натуральных чисел. Все множества, имеющие мощность *a*, мы будем называть *счетными*. Множество квадратов целых чисел, о котором говорил Галилей, именно такое счетное множество. Но тогда для любой другой последовательности тот факт, что мы можем присвоить номер любому ее элементу, показывает, что существует взаимнооднозначное соответствие между последовательностью и натуральным рядом. Четные числа, нечетные числа, любая арифметическая прогрессия, любая геометрическая прогрессия, любая последовательность вообще — все эти множества являются счетными.

Более того, если вообразить, что любая такая последовательность удалена из множества натуральных чисел, оставшееся множество будет по-прежнему бесконечным и по-прежнему счетным. Именно поэтому нет возможности уменьшить мощность счетного множества, применяя процесс *прореживания*. Мы можем, например, удалить все четные числа, затем из оставшихся все числа кратные 3, затем все числа кратные 5. Мы можем продолжать этот процесс бесконечно, но на мощность оставшегося множества это никак не повлияет.

На языке Кантора можно сказать, что *нет меньшего трансфинитного числа*, чем число *a*, которым измеряется мощность любого счетного бесконечного множества.

Но если мы не можем получить меньшее трансфинитное число, прореживая натуральный ряд, может быть, нам удастся увеличить мощность с помощью процесса заполнения? Действительно, кажется, что мощность множества рациональных чисел, которое всюду плотно, должна быть больше, чем у дискретного натурального ряда. Однако снова интуиция нас обманывает, поскольку Кантор показал, что множество рациональных чисел также счетно. Для доказательства необходимо только показать, что сами рациональные числа могут быть упорядочены в последовательность, путем присвоения каждому числу определенного номера. Именно это и делает Кантор. Мы можем получить общее представление об этом методе, рассматривая его геометрически.

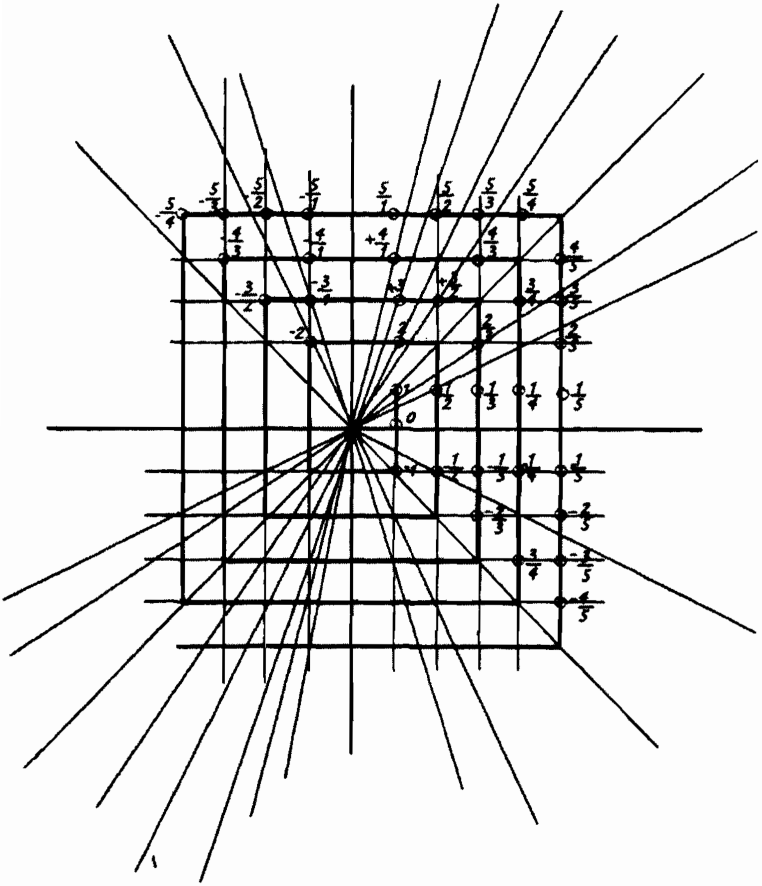
На приведенном рисунке изображены два набора параллельных прямых, пересекающихся под прямым углом. Каждую горизонтальную линию мы отождествим с целым числом y, при этом число y может принимать любые целые значения от $-\infty$ до $+\infty$; то же самое относится и к числам x, с которыми мы отождествим вертикальные линии. Теперь мы пометим каждый узел построенной таким образом решетки двумя числами, которыми определены пересекающиеся в узле горизонтальная и вертикальная линии. Следовательно, символ (x, y) определяет теперь совершенно конкретный узел нашей решетчатой конструкции, и наоборот, любая точка может быть представлена такой парой.

Мы покажем, что все эти узлы решетки образует счетное множество. Чтобы доказать этот поразительный факт, достаточно провести спиралеобразную ломаную, как показано на рисунке, и перенумеровать узлы в том порядке, в котором через них проходит ломаная.

С другой стороны, каждому символу (y, x) мы можем сопоставить дробь $\frac{y}{x}$. Но если мы это сделаем, то, очевидно, не сможем пометить *все* наши узлы различающимися рациональными числами. Фактически все узлы, расположенные на одной и той же прямой, проходящей через начало координат, представляют одно и то же рациональное число, в чем нетрудно убедиться самостоятельно. Чтобы избавиться от этой неопределенности, мы договоримся *учитывать каждую дробь только первый раз, когда она встречается.* Тогда эти точки образуют следующую последовательность

$$1, 0, -1, -2, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$$

(см. рис. на с. 189).



Перепись рациональных чисел

Теперь представлены все рациональные числа, и каждое рациональное число встречается в последовательности только один раз. *Таким образом, мы показали, что множество рациональных чисел является счетным.*

Но читатель может запротестовать, что полученный результат прямо противоречит нашему представлению о компактности, в соответствии с которым у рационального числа не может быть последующего. Ведь между любыми двумя рациональными числами можно вставить бесконечно много других рациональных чисел. Но здесь мы действительно установили порядок следования! Ответ заключается в следующем. Хотя мы действительно построили последовательность, она отличается от натуральной последовательности целых чисел: 1, 2, 3, 4, ..., в которой все числа упорядочены по величине. Нам удалось пересчитать все рациональные числа, потому что при новой систематизации мы не обязаны сохранять порядок следования по величине. Мы получили *упорядоченность за счет связности*.

Поэтому мы видим, что необходимо различать два вида эквивалентности. С точки зрения *соответствия*, два множества являются эквивалентными, если поэлементно можно сопоставить одно с другим. С точки зрения *порядка* – он также необходим. Но для полной эквивалентности, или *подобия*, необходимо, кроме того, чтобы процесс сопоставления не разрушал порядка следования. То есть если во множестве (A) элемент *a* предшествует элементу *a'*, то во множестве (B) соответствующий элемент *b* также должен предшествовать *b'*. Множество рациональных чисел, упорядоченное по величине, и спирально упорядоченное множество, с помощью которого мы пересчитали рациональные числа, эквивалентны с точки зрения соответствия, но не с точки зрения упорядоченности. Другими словами, эти множества характеризуются одним и тем же количественным числительным *a* (т.е. *кардинальным* числом), но они относятся к различным *порядковым типам* (называемым в частном случае вполне упорядоченных множеств *ординальными* числами).

Таким образом, Кантор предложил теорию *порядковых типов*, которые являются аналогом порядковых чисел в конечной арифметике. Однако легкостью, с которой мы переходили от количественных чисел к порядковым, мы обязаны фундаментальному свойству, заключающемуся в том, что у любых двух множеств, характеризующихся одинаковыми количественными числительными, также совпадают и определяющие их порядковые числительные. Но в арифметике бесконечности Кантора у двух множеств с одинаковым кардинальным числом могут быть различные *ординальные* числа. Такие множества Кантор называл *неподобными*.

Таким образом, мы видим, что простая компактность еще не является препятствием для счетности и процесс заполнения элементов влияет на мощность множества не в большей степени, чем процесс прореживания. Поэтому следующий вывод Кантора уже не так поразит нас; он утверждает, что *множество алгебраических чисел также счетно*. Доказательство этой теоремы Кантором – очередной триумф человеческой мысли.

Он начал с определения того, что он назвал *высотой* уравнения. Это сумма всех *абсолютных величин* коэффициентов уравнения, к которому прибавлена степень уравнения, уменьшенная на 1. Поэтому уравнение $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$ имеет высоту $h = 16$, так как $2 + 3 + 4 + 5 + (3 - 1) = 16$.

Затем он доказал, что существует только *конечное* число уравнений, для которых какое-либо положительное целое число h может являться высотой. Это позволяет нам упорядочить *все* алгебраические уравнения в группы по увеличению высоты; так можно показать, что существует только одно уравнение с высотой 1; три – с высотой 2; двадцать два – с высотой 3 и т.д.

Внутри каждой группы с данной высотой можно упорядочить уравнения по любой из множества схем. Например, мы можем объединить в одну подгруппу все уравнения одной и той же степени, а затем упорядочить каждую подгруппу по величине первого коэффициента; те уравнения, у которых первые коэффициенты одинаковы, упорядочить по второму коэффициенту и т.д. и т.д.

Любая из таких схем позволит нам упорядочить все алгебраические уравнения, выстроив некоторую иерархию, и, значит, пересчитать их, т.е. присвоить каждому уравнению номер. Далее, каждому из этих уравнений может соответствовать один или более действительных корней, но их количество всегда конечно и, фактически, не может превышать степень уравнения – и, следовательно, не может превышать высоты этого уравнения. Корни снова можно упорядочить по их величине. Если теперь мы рассмотрим всю схему в целом, то, естественно, найдем повторения, но, как и в случае рациональных чисел, мы можем избежать этих повторений, приняв соглашение учитывать любое алгебраическое число только первый раз, когда оно встречается в процессе.

Таким способом мы сможем присвоить номер *любому* алгебраическому числу в иерархии, иными словами, мы сможем *пересчитать все алгебраические числа.*

На этот раз у читателя может возникнуть подозрение, что, возможно, *все множества счетны.* В этом случае существовало бы только одно трансфинитное число и то, что справедливо в отношении множеств действительных и алгебраических чисел в общем случае, было бы справедливо даже и для континуума. Ведь при помощи такой уловки, как высота уравнения, придуманная Кантором, любое бесконечное множество можно упорядочить в иерархию и, следовательно, пересчитать. Именно таким было намерение Кантора на ранних стадиях его работы – пересчитать *действительные числа.* Это было лишь одним из пунктов его грандиозной программы; и теория трансфинитных чисел обязана своим появлением на свет попытке Кантора «сосчитать континуум».

То, что это не получается, т.е. невозможно упорядочить все действительные числа в счетную последовательность, было известно Кантору уже в 1874 году. Однако строгое доказательство этого факта появилось только в 1883 году. Если не вдаваться в детали доказательства, общий его принцип заключается в том, чтобы предположить, что все действительные числа выстроены в некоторую иерархию, а после этого при помощи метода, который теперь называется *диагональной процедурой*, показать, что можно выявить и другие числа, которые хотя и являются действительными, но отсутствуют среди тех, которые были сосчитаны.

С этим доказательством связан факт, имеющий важное историческое значение. Читатель, наверное, помнит, открытие Лиувиллем трансцендентных чисел. Теорема Лиувилля о существовании была заново подтверждена Кантором как следствие его теоремы о том, что континуум нельзя пересчитать. Относительная «наполненность» двух множеств, алгебраических и трансцендентных чисел – вопрос, смысл которого для Лиувилля оставался достаточно смутным, был сформулирован Кантором со всей строгостью. Он показал, что хотя мощность множества алгебраических чисел *a* такая же, как и у множества натуральных чисел, но мощность множества трансцендентных чисел *c* – это *мощность континуума*. Так были разрешены разногласия и подтверждено, что трансцендентных чисел несравнимо *больше*, чем алгебраических.

И здесь, в области действительных чисел, мощность части может быть равна мощности целого; на изящном старомодном языке Галилея: «более длинный отрезок не содержит больше точек, чем более короткий». Фактически, любой отрезок, неважно насколько он короткий, имеет такую же мощность, как и бесконечно продолжающаяся прямая; любая область, неважно насколько она мала, имеет такую же мощность, как бесконечное трехмерное пространство. Короче говоря: ***Деление на части и объединение влияет на мощность множества не в большей степени, чем прореживание или заполнение.***

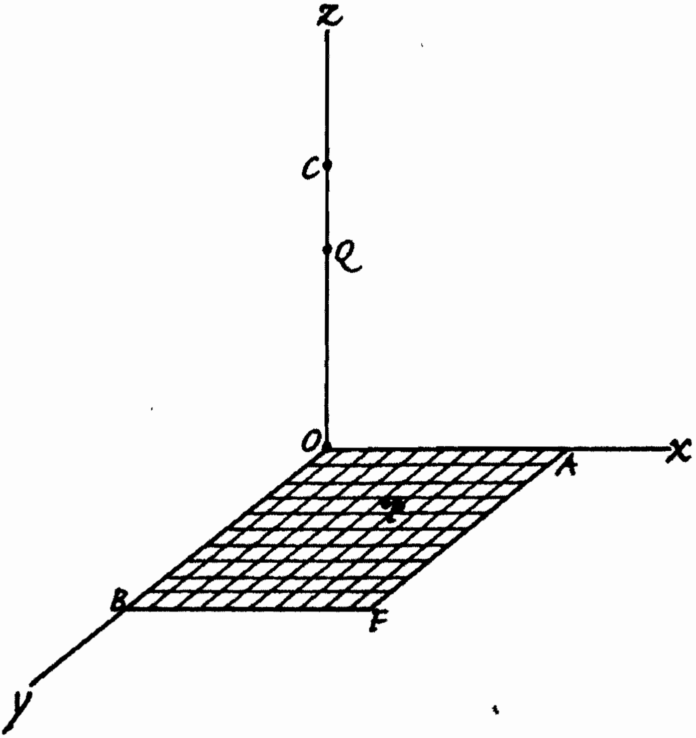
В этот момент наша интуиция снова нашептывает нам предположение. А как насчет многообразий с более высокой размерностью: области комплексных чисел, которую мы отождествили с множеством точек на плоскости; точек трехмерного пространства; векторов и кватернионов; тензоров и матриц и прочих хитроумных совокупностей, с которыми математики работают как с отдельными объектами, подчиняющимися законам операций над числами, но которые нельзя представить в виде чего-то непрерывного, как точки на прямой? Кажется очевидным, что эти многообразия должны иметь мощность большую, чем у *линейного* континуума! Несомненно, в бесконечном трехмерном пространстве, в этой вселенной, простирающейся бесконечно во всех направлениях, точек должно быть больше, чем в отрезке прямой линии длиной в один дюйм!

Скорее всего, вначале Кантор тоже так думал. Но потом он окончательно доказал, что наша интуиция снова нас обманывает. Бесконечные двух- или трехмерные многообразия, математические сущности, зависящие от более чем трех переменных, фактически от любого количества переменных, все же не обладают большей мощностью, чем *линейный континуум*. Мы даже можем представить себе переменные «сущности», состояние которых в каждый момент времени зависит от бесконечного количества независимых переменных, т.е. сущности, которые «обитают» *в мире с бесконечной счетной размерностью*. Так вот мощность бесконечномерного многообразия таких сущностей все равно не превысит мощности линейного континуума, не превысит мощности множества точек на отрезке прямой линии длиной в один дюйм.

Это утверждение настолько прямо противоречит нашим представлениям о размерности, что кажется абсурдным. И действительно, именно таким было общее мнение, когда Кантор впервые опубликовал эти результаты. И среди первоклассных умов это утверждение было принято, мягко выражаясь, осторожно. Но доказательство Кантора настолько просто, что даже хорошо подготовленный школьник может его понять.

Я докажу это утверждение применительно к точкам плоскости: читатель увидит, что основная идея доказательства является абсолютно общей. Поскольку множество точек на отрезке длиной 1 имеет такую же мощность, как и множество точек бесконечной прямой, а множество точек внутри квадрата со стороной 1 имеет такую же мощность, как и множество точек бесконечной плоскости, то будет достаточно показать, что можно установить взаимнооднозначное соответствие между этим квадратом и этим отрезком.

Мы видим, что любая точка P внутри квадрата OAFB (как видно из приведенного рисунка) может быть представлена двумя координатами x, y. Эти два числа являются действительными



Отображение квадрата на отрезок

числами, не превосходящими 1, и могут быть выражены в виде правильных десятичных дробей. Эти дроби всегда можно считать бесконечными, т.к. если даже они являются конечными, их можно представить бесконечными, приписывая нули за последней значащей цифрой. Давайте запишем эти десятичные дроби в виде:

$$x = ,a_1 \ \ a_2 \mid a_3 \ \ a_4 \mid a_5 \ \ a_6 \mid \ldots$$
$$e = ,b_1 \mid b_2 \mid b_3 \mid b_4 \mid b_5 \mid b_6 \mid \ldots$$

Теперь сформируем третью десятичную дробь z, чередуя цифры дробей x и y:

$$z = ,a_1 \mid b_1 \mid a_2 \mid b_2 \mid a_3 \mid b_3 \mid a_4 \mid b_4 \mid \ldots$$

Эта дробь также представляет действительное число, и мы можем показать ее как точку Q на отрезке OC. Следовательно, соответствие, установленное между P и Q, является взаимнооднозначным

нозначным, так как для каждой пары *x*, *y* мы всегда можем получить *z*, причем единственным способом; и, наоборот, зная *z*, можем восстановить числа *x* и *y*, а значит, точку P.

Да, но что находится в промежутке и что находится за пределами?

В теории Кантора ничто не препятствует существованию трансфинитных чисел, больших, чем *a*, но меньших, чем *c*. Однако все известные множества точек являются или счетными, как множества рациональных или алгебраических чисел, или, как множество трансцендентных чисел, имеют мощность арифметического континуума. Все попытки построить множество точек, более «мощное», чем натуральный ряд, но менее «мощное», чем множество точек на прямой, до сих пор не увенчались успехом.

С другой стороны, известны множества, мощность которых больше, чем *c*. Среди них – так называемое многообразие *функционалов*, т.е. *количество всех соответствий*, которые можно установить между двумя континуумами. Элементам этого множества нельзя сопоставить натуральные числа. Соответствующее ему кардинальное число обозначается *f*. Опять же, ничто в теории не препятствует существованию кардинальных чисел между *c* и *f*, однако еще не найдено ни одного множества, мощность которого была бы больше, чем *c*, но меньше, чем *f*.

И за пределами *f* также существуют еще большие кардинальные числа. Та же самая диагональная процедура, которая позволяет нам вывести «пространство» функционалов из континуума, может быть использована, чтобы вывести из пространства функционалов пространство *суперфункционалов*, элементам которого *невозможно* сопоставить элементы из множества соответствий (т.е. функционалов). Следовательно, можно строить множества со все большей и большей мощностью, и этот процесс, по-видимому, *не может быть завершен*.

Итак, дойдя до этой конечной точки, теория Кантора провозглашает, что *не существует последнего трансфинитного числа*. Это утверждение удивительно похоже на другое: *не существует последнего конечного числа*. Однако последнее было только допущением, фундаментальным допущением *конечной* арифметики, в то время как аналогичное утверждение в арифметике *бесконечного* оказывается логическим следствием всей теории.

Не существует последнего трансфинитного числа! Это утверждение звучит достаточно невинно, однако оно содержит в себе заряд, который едва не разрушил всю теорию, и это в то время, когда Кантор, преодолев мощное сопротивление своих первых оппонентов, имел все основания полагать, что его принципы восторжествовали. Практически одновременно было открыто несколько «явлений», которые на первый взгляд различались по своей сути, но указывали на какие-то ошибки. Итальянец Бурали-Форти, англичанин Бертран Рассел, немец Кениг и француз Ричард обнаружили противоречия и парадоксы, которые затем были названы по именам своих авторов. Снова всплыл вопрос об обоснованности методов и выводов Кантора и о правомерности использования актуальной бесконечности в математике.

Я не стану слишком углубляться в сущность открытых противоречий. Разнородные по своей природе, все они так или иначе связаны с вопросами о том, как использовать слово *все* в математике, если вообще нужно его использовать. Если это слово можно свободно использовать в связи с любыми мыслимыми действиями разума, то мы можем говорить о *множестве всех множеств*. Если теперь это является множеством в смысле Кантора, то ему должно соответствовать некоторое кардинальное число. И это трансфинитное число будет «самым большим из всех чисел, которые можно себе представить», поскольку можно ли представить множество более мощное, чем множество всех множеств? Значит, это число будет *последним трансфинитным* числом, то есть действительно самой последней ступенью в развитии той абстракции, которую мы называем числом! Но ведь не существует последнего трансфинитного числа!

Много воды утекло с тех пор, как эти вопросы были впервые поставлены; множество решений было предложено, тысячи работ было написано как сторонниками, так и противниками Кантора; ни те ни другие не жалели насмешек в адрес своих оппонентов. Однако вопрос так и остается открытым. До Кантора математики были едины; после себя он оставил два противоборствующих лагеря.

Изложить основные позиции этих противостоящих математических «группировок» при помощи простых средств, имеющихся в моем распоряжении, при том что я обещал избегать технических подробностей, невозможно. Однако я не выполню поставленную перед собой задачу, если полностью пропущу этот жизненно важный вопрос современной математики. Поэтому я просто и коротко сформулирую дилемму так, как ее выражают самые видные представители обоих противостоящих лагерей.

С одной стороны находятся «формалисты» — Гильберт, Рассел, Цермело. Хотя они и защищают Кантора, но их можно называть «меньшевиками» в том смысле, что они пытаются спасти *минимум* его программы. Они признают, что неограниченное использование слов «все», «множество», «соответствие» и «число» недопустимо. Но решение заключается не в полном отрицании теории множеств, а в ее реконструкции в соответствии с законами чистого разума. Для этого следует продумать набор аксиом, которые лягут в основу теории; а чтобы гарантировать, что интуиция снова не собьет нас с пути, следует построить чисто *формальную*, логически непротиворечивую принципиальную схему таких аксиом, чистый каркас без содержимого. Выстроив такую полную, непротиворечивую систему, мы сможем на ней, как на фундаменте, основать арифметику бесконечного в абсолютной уверенности, что никакие парадоксы или противоречия не возникнут вновь, чтобы тревожить мир разума. Гильберт сказал: «Никто не сможет нас изгнать из рая, созданного для нас Кантором».

К *интуиционистам*, первым представителем которых был Кронекер, поддержанный затем Пуанкаре, относятся также такие великие умы, как Брауэр в Голландии, Вейль в Германии и до определенной степени Борель во Франции. У них совсем другое отношение к определению множества. Болезнь, возникшая еще до Кантора, укоренилась очень глубоко и охватила всю математику. Вот что говорит Вейль:

«Мы должны снова обучаться скромности. Мы думали завоевать небо и взгромоздили облака на облака, которые не могли удержать никого из тех, кто всерьез думал на них укрепиться. На первый взгляд, то, что остается, кажется столь ничтожно малым, что ставится вообще под знак вопроса сама возможность анализа».

Для интуиционистов проблема выходит далеко за рамки теории множеств. Как они утверждают, для того чтобы концепция получила доступ в царство математики, недостаточно, чтобы она была «вполне определенной», — она должна быть *конструируемой*. У такое концепции должно быть не только название; она должна быть снабжена реальным механизмом для определения объекта, который она представляет. Что же касается механизма, то единственно допустимым механизмом являются конечные процессы или — и это действительно компромисс — такие бесконечные процессы, которые сводятся к конечным при помощи конечного набора правил. Такое действие, как представление совместно бесконечного количества отдельных объектов и рассмотрение этой совокупности как единого объекта, должно быть *априори* запрещено в арифметике. И это означает, что не только нужно исключить из употребления теорию множеств, но даже концепция иррациональных чисел должна подвергнуться основательной трансформации, чтобы математический анализ очистился от всех загрязнений, которые проникли в него в результате беспорядочного использования бесконечности. Вейль сказал, что «математика целиком, включая даже логические формы, в которых она движется, зависит от сущности натурального числа».

Хотя спор об обоснованности фундамента, на котором выстроен анализ, идет полным ходом, само сооружение растет с поразительным темпом. Каждый год появляются такие достижения, для которых в девятнадцатом веке потребовались бы десятилетия работы. Каждое десятилетие становится свидетелем возникновения новых областей познания на основе обобщения фактов и наблюдений, которые добровольно подчиняются влиянию математического анализа. А что касается физики, которую в числе первых завоевал анализ, то мироздание теории относительности — это не что иное, как вселенная дифференциальных форм; и дискретные явления микрокосмоса подчиняются законам волновой механики, которые, судя по всему, всего лишь приложение теории дифференциальных уравнений.

И мы видим удивительное зрелище — мы видим, как люди, которые громче всех заявляют о том, что империя выстроена на шатком основании, мы видим, как эти мрачные старейшины время от времени отвлекаются от своих собственных тревожных предсказаний, чтобы присоединиться к напряженной деятельности тех, кто расширяет империю, отодвигая все дальше и дальше протяженную линию фронта.

Таково царство логики!

Между тем днем, когда человек чудесным образом заметил, что пара фазанов и пара дней — это примеры одного и того же числа два, и нашими днями, когда человек пытается выразить числами всю мощь абстракции, пролег длинный и трудный путь; на этом пути было много развилок и поворотов.

Зашли ли мы в тупик? Должны ли мы вернуться назад? Или нынешний кризис — это всего лишь еще один крутой поворот, из которого, если о будущем судить по прошлому, числа снова выйдут с триумфом, готовые покорять новые головокружительные высоты абстракции?

ГЛАВА 12

ДВЕ РЕАЛЬНОСТИ

> Мы находим странные следы на берегу неведомого. Мы разрабатываем одну за другой глубокие теории, чтобы узнать их происхождение. Наконец, нам удается распознать существо, оставившее эти следы. И – подумать только! – это мы сами.
>
> *А.С. Эддингтон*

Мой рассказ подходит к концу. Я хотел внимательно изучить текущее состояние науки о числах в свете ее исторического развития. В заключительной главе такого обзора казалось бы уместным бросить беглый взгляд в будущее. Но будущее принадлежит пророкам, и я уважаю их привилегии.

Тогда остается *вечный* вопрос: проблема реальности. Этот вопрос находится в компетенции философов с тех самых пор, как человек впервые сознательно задумался о своем месте во вселенной. Сегодня это одна из главных тем, над которыми работают философы.

И я вполне осознаю, что, выбирая реальность в качестве темы для заключительной главы, я вторгаюсь на чуждую мне территорию, выходящую за рамки моего образования и кругозора. Должен признаться, что не могу сказать ничего нового по поводу этой старой проблемы и не имею намерения пересказывать заново все, что по этому вопросу говорили философы противоборствующих школ, начиная со времен Сократа.

Меня интересует только место, которое наука о числах занимает в общей структуре человеческих знаний. И именно с этой точки зрения я рассмотрю связь между концепцией числа и реальностью наших чувств. И я надеюсь, что это поможет пролить свет на историческую роль, которую сыграла математика в создании *новой реальности*, *трансреальности* современной науки.

Между отношением философов и математиков к вопросу о реальности есть существенная разница, поскольку для философов это вопрос первостепенной важности, в то время как математики любят реальность чисто платонически.

Математику просто очень нравится считать, что он имеет дело исключительно с действиями разума. Конечно, он осознает, что хитроумные уловки, являющиеся его стандартными приемами, берут свое начало в чувственных образах, отождествляемых с грубой реальностью. Поэтому его не удивляет, когда временами оказывается, что эти уловки абсолютно точно соответствуют реальности, в которой они родились. Но математик отказывается признавать эту точность критерием своих достижений: ценность порождений творческого воображения не может быть измерена степенью применимости их к физической реальности. Вовсе нет! Математические достижения должны оцениваться по стандартам, свойственным исключительно математике. А эти стандарты не зависят от грубой реальности наших чувств. Они логически непротиворечивы, применимы ко всем законам, которым подчиняются созданные объекты; эти стандарты устанавливают взаимосвязь между новыми объектами и их предшественниками.

Математика можно сравнить с дизайнером одежды, который довольно часто забывает о тех людях, которым его одежда могла бы подойти. Конечно, его искусство возникло из необходимости одевать этих людей, но это было очень давно; а в наши дни одежда иногда принимает настолько причудливые формы, что кажется созданной ради себя самой. Поэтому нет конца восхитительным сюрпризам!

За всю историю было лишь несколько таких приятных сюрпризов. Конические сечения, открытые при попытке решить проблему удвоения жертвенника в храме, в конце концов стали траекториями, по которым планеты движутся в своем вращении вокруг Солнца. Мнимые величины, открытые Карданом и Бомбелли, некоторым странным образом описывают характерные особенности переменного тока. Абсолютное дифференциальное исчисление, появившееся как фантазия Римана, стало математическим аппаратом теории относительности. И матрицы, которые были полной абстракцией во времена Кэли и Сильвестра, превосходно подошли к экзотическим состояниям, появляющимся в квантовой теории атома.

Хотя эти сюрпризы приятны, такие открытия не являются движущей силой, определяющей творческую активность математика. Для него наука — это область, в которой он может лучше всего проявить свою индивидуальность. Математика ради математики! «Люди потрясены этой доктриной, — говорил Пуанкаре, — однако это не хуже, чем жизнь ради самой жизни, если жизнь это страдание».

Религия — мать всех наук. Когда дети подрастают, они покидают свою мать; а философия осталась дома, чтобы утешать ее в старости. Долгая близость больше отразилась на дочери, чем на матери.

До наших дней в основных вопросах философии просматривается теология. Мне кажется, что принцип относительности — это главное, чего не достает философии.

Принцип относительности — это просто система ограничений. Она определяет границы, в пределах которых наука будет развиваться, и открыто признает, что нет способа удостовериться, является ли определенный набор фактов проявлением *наблюдаемого* или галлюцинацией *наблюдателя*.

Принцип относительности — это акт смирения. В философии этот принцип должен был бы состоять в открытом признании неразрешимости старой проблемы: существует ли вселенная *сама по себе* или она существует только в разуме человека? Для человека, который занимается наукой, принятие одной или другой гипотезы — это вовсе не вопрос «быть или не быть». С точки зрения логики каждая из гипотез разумна, а с точки зрения эксперимента ни одна из них не доказуема. Поэтому выбор всегда будет обусловлен целесообразностью и удобством. Человек науки будет действовать, как *если бы* этот мир был абсолютным и подчинялся законам, не зависящим от мыслей и действий человека. И когда он открывает закон, удивительный по своей простоте или всеохватности, или закон, указывающий на совершенную гармонию мироздания, то вполне разумно поинтересоваться, какую роль его разум сыграл в этом открытии? Раскрывает ли прекрасный образ, который человек увидел в осколке бесконечности, природу этой бесконечности, или это просто отражение его собственного разума?

Рассуждения философов на тему реальности почти бесполезны, когда мы пытаемся определить степень реальности общей концепции числа. Определенно, следует искать другие пути. Но сначала давайте избавимся от некоторых двусмысленностей в терминологии.

Термины, используемые математиками, это, в конце концов, просто слова, и эти слова принадлежат ограниченному словарю, посредством которого человек с незапамятных времен пытается выражать свои мысли, как математические, так и нематематические. Некоторые из терминов, такие как геометрия или счисление, утратили свое первоначальное двойное значение, и все их теперь понимают в том особом смысле, который они приобрели в математической практике. Однако другие термины, такие как логичный и нелогичный, рациональный и иррациональный, конечный и бесконечный, действительный и мнимый, сохранили свое множественное значение до наших дней. Для математиков, которые редко осмеливаются заходить в царство метафизики, эти слова имеют очень конкретное и абсолютно недвусмысленное значение. Для философов, которые используют эти слова как стандартные термины, они также имеют очень конкретное, но совершенно иное значение. Для человека, который не является ни философом, ни математиком, в этих словах содержится весьма общий и достаточно смутный смысл.

Никаких трудностей не возникает до тех пор, пока философ не пытается представить широкой публике свой анализ фундаментальных концепций математики. А вот тогда различный смысл, который вкладывается в такие слова, как бесконечность или реальность, приводит к безнадежной путанице в умах непрофессионалов.

Это особенно относится к таким понятиям, как *действительный* и *мнимый*. Мы обязаны этими неудачными, однако исторически неизбежными терминами философу — Декарту. Тогда термин *мнимое*, прилагаемый к выражению $a+\sqrt{-b}$, был оправдан, поскольку эту величину никак нельзя было обосновать. Однако после того как была найдена наглядная интерпретация, неадекватность термина *мнимый* осознали. Вот что по этому поводу говорит Гаусс:

«То, что этот предмет рассматривался с ошибочной точки зрения и был окутан такой таинственностью, в значительной степени обусловлено использованием неподходящей терминологии. Если бы числа $+1$, -1 и $\sqrt{-1}$ называли не положительными, отрицательными и мнимыми (иногда даже невозможными), а, например, прямыми, непрямыми и поперечными, то этой таинственности можно было бы избежать».

Но все протесты оказались совершенно напрасными — слово «мнимый» пустило слишком глубокие корни. Такая устойчивость математических терминов просто поразительна: может быть, она обусловлена консервативностью математиков или их безразличием к выбору слов, до тех пор пока не возникает двусмысленность. Как бы то ни было, термин «комплексный» начал несмело вытеснять слово «мнимый», хотя и сегодня все еще используются оба термина. А что касается слова «действительный», более подходящей замены для него даже не было предложено. (В русском языке по определению *комплексное* число состоит из действительной и *мнимой* части. — *Прим. пер.)*

Использование в математике термина *мнимый* некоторые специалисты по реальности истолковывают как доказательство того, что современную математику насквозь пронизывает мистицизм. Они утверждают, что, выбирая такие термины, математики в силу самого этого факта допускают нереальность этих величин. Спорить об этом так же бессмысленно, как обсуждать с минералогом признаки каменистости анализа бесконечно малых, поскольку слово *calculus* (т.е. анализ, исчисление) означает также и камень.

Если и есть нечто нереальное в комплексных числах, то оно связано не с названием и не с использованием обозначения $\sqrt{-1}$; комплексное число — это просто пара действительных чисел, рассматриваемая как единое целое, и по этой причине комплексное число не может быть в большей или в меньшей степени реальным, чем действительные числа, из которых оно состоит. Таким образом, критика реальности концепции числа должна быть обращена на действительные числа. И вот тут философ сможет найти сколько угодно свидетельств того мистицизма, которые он ищет в математике.

Как ни велика степень абстракции, которой мы обязаны понятию натуральных чисел, все же эта концепция родилась в условиях надежной «реальности» конечных совокупностей. Правда, в тот момент, когда мы начали рассматривать эти числа как совокупность, нам пришлось ввести слово *все*, со всеми вытекающими последствиями. Тем не менее концепция бесконечности, в том виде, в каком она использовалась в рациональной арифметике, была ограничена утверждением, что для *любого* числа существует последующее. Неограниченный характер процесса счета нужен был лишь для того, чтобы правила операций над целыми приобрели абсолютную общность: бесконечность использовалась только как нечто *потенциальное* и никогда как *актуальная*.

Рациональное число — это всего лишь пара целых чисел, и, следовательно, оно так же реально, как целое. Значит, мы могли бы избежать, как советует Кронекер, введения бесконечных процессов и, следовательно, иррациональностей; комплексные числа могли бы быть просто парами рациональных чисел, и все, что касается реальности или нереальности рациональных чисел, относилось бы и к комплексным. Но в процессе поиска таких областей, в которых любое алгебраическое уравнение имело бы решение, нам пришлось узаконить бесконечные процессы, и в результате этого появились так называемые действительные числа. Мы уже не ограничиваемся использованием слова бесконечность в качестве оборота речи или сокращенного утверждения о том, что, как бы ни было велико число, всегда существует еще большее. Теперь бесконечность стала источником процессов, порождающих любые числа; а любое число рассматривается как самый последний шаг бесконечного процесса. Концепция бесконечности вплелась в саму ткань нашей обобщенной концепции числа.

Область натуральных чисел выстроена на предположении, что *операцию сложения можно повторять бесконечно*, причем совершенно точно оговорено условие, что *никогда самый последний шаг этого процесса сам по себе не может рассматриваться как число.* Обобщение на область действительных чисел не только расширяет обоснованность бесконечных повторений на любые рациональные операции; фактически, оно снимает ограничение и признает пределы бесконечных процессов полноценными числами.

Ирония слов заключается в том, что для получения так называемых действительных (вещественных, *реальных*) чисел пришлось пожертвовать частью той самой *реальности*, которая была свойственна натуральным числам.

Насколько реальны эти бесконечные процессы, наделившие нашу арифметику такой абсолютной общностью, что она смогла стать инструментом интуиции в геометрии и механике, а через геометрию и механику позволила нам выразить числом закономерности физики и химии? Да, если бы реальность была ограничена непосредственным опытом наших чувств, то никто, будь он математиком, философом или просто непрофессионалом, не признал бы вещественности этой концепции.

Однако есть широко распространенное мнение, что обоснованность бесконечности является неизбежным следствием развития эмпирических наук. С моей стороны было бы дерзостью опровергать это утверждение своими словами, в то время когда Давид Гильберт так выразительно говорит об этом в своем знаменитом обращении, посвященном памяти Вейерштрасса:

«Бесконечность! С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность.

Обращаясь к задаче о выяснении сущности бесконечного, мы должны по возможности кратко представить себе, какое содержательное значение соответствует бесконечному в действительности; мы посмотрим сначала, что нам дает в этом отношении физика.

Первым наивным впечатлением, производимым явлениями природы и материей, является впечатление чего-то непрерывного, континуального. Если мы имеем перед собою кусок металла или некоторый объем жидкости, то нам навязывается представление о том, что они неограниченно делимы, что сколь угодно малый кусок *их опять-таки* обладает теми же свойствами. Но повсюду, где методы исследования в физике материи достаточно усовершенствованы, мы *наталкиваемся на границы этой делимости*, *которые* лежат не в несовершенстве нашего опыта, а в природе самой вещи, так что можно было бы прямо-таки воспринимать тенденцию современной науки как освобождение от бесконечно малого; теперь можно было бы старому тезису «natura non facit saltus» (природа не делает скачков) противопоставить антитезу: «природа делает скачки».

Известно, что вся материя составлена из маленьких кирпичиков — из *атомов* — и что их комбинации и соединения образуют все многообразие макроскопических веществ. Однако физика не останавливается перед учением об атомном строении материи. Рядом с ним в конце прошлого столетия выступает, сначала очень непривычно действующее, учение об атомном строении электричества. В то время как раньше электричество считалось жидкостью и было примером непрерывно действующего агента, теперь оказалось, что и оно построено из положительных ядер и отрицательных *электронов*.

Помимо материи и электричества, в физике имеется еще и другая реальность, *для которой также имеет место закон сохранения*, именно — энергия. Но, как установлено теперь, и энергия не допускает простого и неограниченного деления на части: Планк открыл *кванты энергии*.

И каждый раз получается тот итог, что однородный континуум, который должен был бы допускать неограниченное деление и тем самым реализовать бесконечное в малом, в действительности нигде не встречается. Бесконечная делимость континуума — это операция, существующая только в человеческом представлении, это только идея, которая опровергается нашими наблюдениями над природой и опытами физики и химии.

Второй раз мы наталкиваемся в природе на вопрос о бесконечности при рассмотрении вселенной в целом. Мы должны теперь исследовать протяженность вселенной, чтобы узнать, нет ли здесь бесконечно большой величины.

Мнение, что вселенная бесконечна, долгое время господствовало; до Канта и даже после него вопрос о бесконечности вселенной не вызывал никаких сомнений.

Но опять-таки современная наука, и в частности астрономия, подняла этот вопрос сызнова и попыталась решить его не с помощью недостаточных методов метафизического умозрения, а на основах, опирающихся на опыт и покоящихся на применении законов природы. При этом выявились веские возражения против бесконечности. Предполагать, что пространство бесконечно, вынуждает нас геометрия *Евклида*. Хотя геометрия Евклида и является системой понятий, непротиворечивой в самой себе, но отсюда, однако, еще не следует, что она выполняется в действительности. Имеет ли это место — это может решить только наблюдение и опыт. При попытках умозрительно показать бесконечность пространства вкрадывались также и очевидные ошибки. Из того факта, что вне какого-либо куска пространства всегда снова имеется пространство, следует только неограниченность пространства, а не его бесконечность. Но понятия неограниченность и конечность не исключают друг друга. Математические исследования дают нам так называемую *эллиптическую* геометрию — естественную модель конечного мира. Отказ от евклидовой геометрии является теперь не только чисто математическим или философским умозрением, но мы пришли к этому отказу также и с другой стороны, которая первоначально не имела ничего общего с вопросом о конечности вселенной. Эйнштейн показал необходимость отойти от геометрии Евклида. На основании своей гравитационной теории он берется и за космологические вопросы и показывает возможность конечности вселенной, причем все найденные астрономами результаты вполне согласуются с предположением об эллиптическом мире».

Итак, чем дальше мы продвигаемся в своих знаниях о физическом мире или, другими словами, чем больше научные приборы расширяют воспринимаемый нами мир, тем яснее мы осознаем несовместимость концепции бесконечности с физическим миром как фактически, так и в принципе.

Поскольку концепция бесконечности не является логической необходимостью и поскольку она не только не согласуется с нашим повседневным опытом, но и все эксперименты свидетельствует о том, что эта концепция ошибочна, казалось бы, применение бесконечности в математике *необходимо исключить во имя реальности*. Но такое изъятие свело бы математику к ограниченной арифметике и ограниченной геометрии, которые я обсуждал в четвертой главе. «То, что остается, кажется столь ничтожно малым, что ставится вообще под знак вопроса сама возможность анализа». Величественное здание, воздвигнутое математиками трех последних столетий, было бы разрушено до основания; принципы и методы, основанные на использовании бесконечности, оказались бы на свалке; физическим наукам, которые так самонадеянно применяли концепции предела и функции в большинстве формулировок и при анализе своих задач, пришлось бы начать с чистого листа – им пришлось бы заложить новый фундамент и придумать новые инструменты взамен изъятых.

И все это во имя реальности!

Конечно, это радикальный способ. Но после такого пересмотра та небольшая часть математики, которая уцелела бы после завершения процесса очистки, находилась бы в полной гармонии с реальностью.

В полной гармонии? Это вопрос. И этот вопрос равносилен другому вопросу: «Что такое реальность?» Когда мы задаем этот вопрос, нас интересуют вовсе не педантичные определения или не относящиеся к сути софизмы; нас интересуют только границы, которые можно установить для этой реальности, так чтобы отныне они могли служить критерием того, что обоснованно и того, что не обоснованно.

Естественно обратиться к специалистам по реальности. Каждый из них предложит нам свой особенный вид реальности, но что касается *реальности* вообще, то ее, кажется, не существует. Мы оказались в том положении, которое французы так выразительно называют *embarras du choix* (затруднение из-за большого выбора).

Наиболее интересны для нас две модели реальности: субъективная реальность и объективная реальность. Субъективная реальность представляется чем-то, что могло бы быть описано как совокупность всех чувственных впечатлений личности. Что касается объективной реальности, ее определение зависит от школы философов, поскольку именно здесь вопрос о том, существует или не существует мир за пределами нашего сознания, становится решающим. Очищенная от метафизических неясностей и философского жаргона формулировка Пуанкаре звучит так: «То, что мы называем объективной реальностью, это в конечном счете то, что общо нескольким мыслящим существам и могло бы быть общо всем». Несмотря на туманность, несмотря на очевидную слабость выражения «что могло бы быть общо всем», это определение ближе всего к тому интуитивному представлению о реальности, которое, кажется, присуще каждому из нас.

Теперь трудность в определении обоснованных границ реальности заключается главным образом в том, что никто не может достоверно отличить субъективную реальность, которая является совокупностью его собственных чувственных впечатлений, от объективной реальности, которую он обретает, соприкасаясь с другими личностями в настоящем или в прошлом. Изучение психологии первобытных людей в значительной степени может пролить свет на этот вопрос, но здесь также вмешиваются внешние условия. Ближе всего мы можем подойти к постижению субъективной реальности через психологию детей. Но поскольку мы не можем последовательно восстановить наши собственные детские впечатления, мы должны полагаться на исследования, которые проводят с участием детей взрослые; на исследования, неизменно искаженные предвзятыми мнениями.

Но давайте предположим, что субъективную реальность можно отождествить с данными, которые физиологи и психологи, такие как Гельмгольц или Мах, получают при исследовании восприятия света, звука, соприкосновения и т.д. Если границы этой реальности рассматривать в качестве критерия обоснованности, то приговор неизбежно заключался бы в том, что даже чахлая арифметика, которая осталась бы после очистки математики от понятия бесконечности, должна подвергнуться дальнейшим сокращениям, так как *процесс счета не является частью этой реальности.*

Процесс счета в качестве необходимого условия предполагает другую реальность, объективную реальность, если интерпретировать этот термин в том смысле, в каком его использовал Пуанкаре. Счет в качестве необходимого условия предполагает способность человека относить различные ощущения к одному и тому же классу и наделять этот класс названием; он предполагает способность поэлементно сопоставлять два набора и связывать эти наборы с числительным — словом, которое является всего лишь моделью данного количества; он предполагает способность упорядочить наборы в последовательность и развить синтаксис, который позволит бесконечно расширять эти числительные. Другими словами, процесс счета требует, чтобы существовал *язык*, т.е. некое образование, превосходящее субъективную реальность или любое непосредственное восприятие личности.

Таким образом, если мы возьмем эту субъективную реальность в качестве критерия обоснованности в математике, то мы будем вынуждены отказаться не только от бесконечных процессов и всего, что с ними связано, но и сдать в утиль сам процесс счета. Допустимым останется только примитивное чувство числа, каким обладают некоторые птицы и насекомые; вместе с языком и арифметикой нам придется сдать в утиль всю замысловатую структуру цивилизации, выстроенной на этих двух образованиях.

Об абсолютном и неизменном мире, который существует вне нашего сознания, мы знаем только из теологических рассуждений: для натуральной философии принять или отвергнуть его одинаково бессмысленно. Но также бессмысленно и неэффективно принимать грубую реальность наших чувств в качестве первоначальной реальности, единственной реальности. Для систематического описания, конечно, удобно рассматривать новорожденного ребенка, или первобытного человека, или животное как воплощение такой первоначальной реальности. Мы даже можем пойти дальше и представить, как это делали Гельмгольц, Мах и Пуанкаре, разумное существо, лишенное всех чувств, кроме одного, например зрения, и порассуждать о том, какую картину мироздания могло бы создать такое существо. Такие рассуждения чрезвычайно привлекательны, так как предоставляют полную свободу нашей способности разделять наши ощущения на составляющие, а затем рассматривать наши представления как результат синтеза этих первоначальных чувств. Но признание результата такого синтеза в качестве реальности, в качестве *единственной* реальности, имеет, по моему мнению, один роковой недостаток: без доказательства принимается существование отдельного разума, в то время как сам процесс согласования этих ощущений требует мышления, которое невозможно без аппарата языка, который в свою очередь подразумевает систематический обмен впечатлениями, что в свою очередь предполагает коллективное существование человеческих личностей, некоторую разновидность социальной организации.

Единственная реальность, которую можно взять в качестве критерия обоснованности, это не та абсолютная неизменная реальность, которая существует вне нашего сознания и, следовательно, является чисто метафизической, и не та первоначальная реальность, которую физиологи и психологи умудряются выделить посредством кропотливых экспериментов, а та объективная реальность, которая является общей для многих и может быть общей для всех. И эта реальность не набор застывших образов, а живой и развивающийся организм.

Но когда мы обратимся к этому объективному миру и начнем искать критерий реальности математических концепций, мы столкнемся с новой трудностью. Конечно, общее для многих может быть ограничено теми непосредственными впечатлениями личности, которые она разделяет с другими мыслящими существами; но в это общее также могут входить данные, полученные человечеством с помощью применения научной аппаратуры, поскольку эти факты также являются общими для многих и могут, вероятно, стать общими для всех. Теперь этот расширенный мир можно обоснованно использовать для оценки реальности любого качественного утверждения; но, когда мы попытаемся использовать его в качестве критерия для числа, мы столкнемся с тем фактом, что этот объективный мир в качестве предварительного условия уже включает в себя число, поскольку наши научные *инструменты спроектированы*, изготовлены и используются в соответствии с определенными математическим принципами, которые, в свою очередь, основаны на понятии числа.

В самом деле, когда мы пользуемся линейкой или весами, датчиком давления или термометром, компасом или вольтметром, мы всегда измеряем то, что нам кажется *континуумом*, и мы проводим измерения, используя шкалу с делениями, помеченными *цифрами*. Значит, мы предполагаем, что существует взаимнооднозначное соответствие между возможными состояниями внутри этого континуума и множеством чисел, имеющихся в нашем распоряжении. Мы по умолчанию принимаем аксиому, которая по отношению к континууму играет такую же роль, как и аксиома Дедекинда—Кантора по отношению к прямой линии. Следовательно, любое измерительное устройство, насколько бы простым и естественным оно нам ни казалось, неявно заключает в себе весь аппарат арифметики действительных чисел: за любым научным прибором скрывается самый главный инструмент — арифметика, без которой никакое конкретное устройство нельзя ни использовать, ни даже вообразить.

В этом и заключается трудность: если мы судим о реальности действительных чисел по объективному миру, содержащему все данные, полученные посредством научной аппаратуры, то мы движемся по замкнутому кругу, поскольку *все эти инструменты уже подразумевают реальность действительных чисел.*

Но мы не сможем избежать этого замкнутого круга, даже если ограничимся более узким объективным миром наших непосредственных впечатлений, которые разделяются другими. Давайте запретим все измерительные приборы, давайте провозгласим общественное мнение единственным критерием реальности. Как тогда мы сможем прийти к правильному суждению? Если вы объявите, что я дальтоник, поскольку я вижу зеленый цвет, там где вы видите красный, как вы сможете доказать истинность своего утверждения, если не прибегнете к *правилу большинства*? Значит, нам придется согласиться снова предоставить решение *числам.*

Цифры не лгут, потому что они не умеют лгать. Они не умеют лгать, потому что *априори* объявлены непогрешимыми. Выбирая число в качестве единственного судьи, выносящего приговор, соглашаясь подчиняться его решениям, мы в силу самого этого факта отказываемся от права апелляции к любому другому трибуналу.

Какой же из всего этого следует вывод?

Человек, вырванный из своего окружения, лишенный языка, *лишенный возможности* обмениваться впечатлениями с равными ему, не смог бы построить науку о числах. В воспринимаемом им мире арифметика не была бы реальной, не имела бы смысла.

С другой стороны, объективный мир мыслящего существа всегда слагается из тех впечатлений, которые разделяются большинством равных ему. Для него вопрос о том, какую реальность описывает число, просто лишен смысла, поскольку без числа нет реальности, так же как нет реальности без пространства или без времени.

Значит ни в субъективном, ни в объективном мире мы не найдем критерия реальности концепции числа, поскольку первый не содержит такой концепции, а во втором нет ничего свободного от этой концепции.

Как же мы сможем найти критерий? Не с помощью фактов, поскольку факты подтасованы. Не с помощью логики, поскольку логика не существует независимо от математики; она всего лишь одна из граней той многогранной неотвратимости, которую мы называем математикой. Как же тогда судить о математических концепциях? *О них нельзя судить*! Математика – это высший судья, ее решения нельзя обжаловать.

Мы не можем изменить правила этой игры, не можем проверить, честная ли игра. Мы можем только изучить участника игры; однако не с беспристрастной позиции наблюдателя, ведь мы наблюдаем за игрой нашего собственного разума.

Вспоминаю свои собственные впечатления, когда я впервые был посвящен в тайны комплексных чисел. Я помню свое недоумение, поскольку величины очевидно невозможные тем не менее допускают манипуляции, что приводит к конкретным результатам. Я чувствовал неудовлетворенность, беспокойство, желание наполнить содержанием эти иллюзорные создания, эти пустые символы. Затем я узнал о конкретной геометрической интерпретации этих величин. И это принесло немедленное облегчение, поскольку загадка была раскрыта и призрак, внушавший мне опасения, оказался совсем не призраком, а частью привычного окружения.

С тех пор я имел много возможностей убедиться, что другие люди испытывают в этом случае похожие эмоции. Откуда это чувство облегчения? Мы находим конкретную модель для этих символов; мы связываем их с чем-то знакомым, с чем-то реальным или, по крайней мере, с чем-то, что кажется реальным. Однако почему мы считаем, что точка на плоскости (или, точнее, длины отрезков, соединяющих эту точку с двумя произвольными осями системы отсчета) более реальна, чем величина $a + ib$? Какая реальность скрыта в плоскости, в прямой или в точке? Еще только год или два назад они также были для меня фантомами. Плоскость, простирающаяся бесконечно во все стороны, — ближайшей аналогией этого для меня был лист бумаги размером 8 на 11 дюймов или неровная поверхность классной доски, на которой было полно выщербин и царапин. Прямая лишена толщины; точка пересечения двух таких прямых вообще не имеет размера — чистая иллюзия, для которой не может существовать никакой модели. И наконец, координаты такой точки, включающие все неопределенности, все неточности измерения. И это конкретная реальность, которая принесла мне облегчение?

Мы связали фантом с выдумкой, которая имеет перед фантомом только то преимущество, что это уже *знакомая выдумка*. Но она тоже не всегда была нам знакома; не так давно она тоже вызывала замешательство и беспокойство, пока мы не связали ее с еще более примитивной иллюзией, которая в свою очередь представляется конкретной, благодаря многовековой привычке.

Сегодняшняя реальность — это всего лишь вчерашняя иллюзия. Иллюзии продолжают существовать, так как они помогают организовать, систематизировать и использовать наш жизненный опыт, и значит они полезны для человечества. Так я интерпретирую слова Ницше:

«Ложность суждения еще не служит для нас возражением против суждения; это, быть может, самый странный из наших парадоксов. Вопрос в том, насколько суждение споспешествует жизни, поддерживает жизнь, поддерживает вид, даже, возможно, способствует воспитанию вида; и мы решительно готовы утверждать, что самые ложные суждения (к которым относятся синтетические суждения a priori) – для нас самые необходимые, что без допущения логических фикций, без сравнивания действительности с чисто вымышленным миром безусловного, самотождественного, без постоянного фальсифицирования мира посредством числа человек не мог бы жить, что отречение от ложных суждений было бы отречением от жизни, отрицанием жизни».

Ни непосредственная очевидность, ни законы логики не позволяют установить обоснованность математических концепций. Суть вопроса заключается в том: в какой мере эти концепции сохраняют интеллектуальную жизнь человечества и способствуют ее развитию? Вот почему тревожные сообщения угрюмых старцев оставляют меня равнодушным. Критерий обоснованности любой иллюзии появляется задним числом, *post factum*, а иногда и *post mortem* (т.е. после смерти). Те из них, которые сохранились и способствуют развитию человечества, растут и процветают, заслуживая этим свое право на реальность. А те, которые оказались губительными или бесполезными, в конце концов окажутся в учебниках по теологии и метафизике и там останутся. Они тоже погибнут не напрасно.

Экспериментальные данные и логическая необходимость не исчерпывают тот объективный мир, который мы называем реальностью. Существует и математическая необходимость, которая направляет наблюдение и эксперимент и для которой логика лишь одна из ее граней. Другая ее грань – это та непостижимая, неуловимая, не поддающаяся определению вещь, которую мы называем интуицией. А теперь вернемся к фундаментальному вопросу науки о числах – к бесконечности. Концепция бесконечности возникла не из эксперимента и не из логической необходимости; это *математическая необходимость*. Это подтверждение силы разума, знающего, что он может понять: *бесконечное повторение действия, если это действие вообще возможно, может* *быть и выдумка, но это удобная, а потому необходимая выдумка.* Она освобождает нас от необходимости изучать для каждого конкретного случая, возможно ли вообще то, что мы утверждаем. Это придает нашим утверждениям видимость общности, без которой не было бы науки, и, более того, прокладывает мост через пропасть, разделяющую неизбежную концепцию мира, *который плывет в потоке времени,* и концепцию числа, которое появилось на свет из *дискретного счета.*

Но бесконечность — это только одна из боковых дорог, по которым человек движется в поисках Абсолюта. Есть и много других: простота, согласованность, однородность, регулярность, обусловленность — это все проявления математической интуиции. Именно математическая интуиция побуждает разум следовать за миражом абсолюта, обогащая интеллектуальное наследие человечества; но, когда дальнейшее преследование миража подвергает опасности это наследие, именно математическая интуиция останавливает полет разума, шепнув тихонько: «Как странно, что цель, которую мы преследуем, так похожа на своего преследователя!»

В чем же источник этой созидательной интуиции? Какая необходимость организует и ведет опыт человека, оберегая его ужаса Хаоса? Откуда приходит эта вера, которая поднимает холодные, неподвижные и бесплодные камни логики?

«Волны целую вечность перешептываются друг с другом,
Ветер дует и бегут облака,
Мерцают звезды, безразличные и холодные,
А глупец все стоит и ждет ответа».

А что делает мудрец? А мудрец, продолжая свои дела, обдумывая выдумки сегодняшнего дня, которые могут стать реальностью дня завтрашнего, бросит последний взгляд на дальние вершины, за которыми потерялся источник мысли, и повторит слова:

«Хотя источник мутен, все же поток течет».

ПРИЛОЖЕНИЕ А

О ЗАПИСИ ЧИСЕЛ

> Вопреки необоснованному мнению несведущих, выбор системы исчисления – это просто вопрос удобства.
>
> *Паскаль*

О чувстве чисел у животных и у людей

Как можно понять, что количество объектов в наборе изменилось, фактически не прибегая к счету? В чем природа той интуиции, которую мы называем *чувством числа*? Довольно много читателей более ранних изданий этой книги попытались ответить на этот вопрос. Я не считаю себя достаточно компетентным, чтобы выносить решение об обоснованности аргументов, приводимых в поддержку их теорий; я также не хотел бы накладывать ограничения на их творческое воображение; я просто перечислю здесь несколько наиболее убедительных гипотез этих авторов писем.

При оценке набора может помочь его *разнородность*. Допустим, войдя в комнату, вы осознаете, что людей в ней меньше, чем обычно, поскольку отсутствуют некоторые знакомые вам лица. Вы обязаны своим успехом своей оценки тому обстоятельству, что члены группы не похожи друг на друга, как горошины в стручке, но являются личностями, каждой из которых присущи свои характерные черты. Возможно, именно таким способом вороне из истории в первой главе удавалось понять, что не все, кто вошел в башню, вышел из нее.

Оценке может способствовать *усталость*, возникающая при попытках преодолеть препятствие. Таким образом, если вы поднимаетесь по лестнице, не считая этажи, то ваши ноги скажут вам, преодолели вы пять или шесть пролетов. Возможно, так объясняется чувство числа у пилюльных ос.

Очень часто изменение *распознаваемого шаблона* также может оказать значительную помощь. Если вы с первого взгляда определяете, что стол сервирован не на четыре, а на большее количество персон, то эту информацию вам предоставляет изменившийся шаблон. Или рассмотрим ряд горошин на столе. Если они выложены в одну линию, достаточно *плотно* одна к другой, то, вероятно, вам не удастся отличить пять горошин от шести; более вероятно, что вы угадаете правильно, если горошины расположены неравномерно. А если расположить горошины как вершины многоугольника, то ваше суждение будет еще более надежным. Возможно, именно такие принципы управляют инстинктом птиц, чьи гнезда были обворованы.

Как Ксеркс пересчитал свою армию

«Дориск же – это обширная равнина на фракийском побережье. По этой равнине течет большая река Гебр. Там уже раньше было воздвигнуто царское укрепление под названием Дориск. В нем Дарий во время похода на скифов оставил персидскую стражу. Местность эта показалась Ксерксу подходящей для смотра и подсчета боевых сил, что царь и сделал. А все корабли, пришедшие в Дориск, Ксеркс велел навархам причалить к соседнему с Дориском побережью... К этому-то побережью навархи и причалили свои корабли и затем вытащили на берег для просушки. Тем временем Ксеркс в Дориске производил подсчет боевых сил.

Сколь велика была численность полчищ каждого народа, я точно сказать не могу, потому что об этом никто не сообщает. Общее же количество сухопутного войска составляло 1 700 000 человек. А подсчет производился следующим образом: согнали в одно место 10 000 человек и, поставив как можно плотнее друг к другу, обвели вокруг чертой. Обведя чертой, отпустили эти 10 000 воинов и по кругу построили ограду высотой человеку до пупа. После этого стали загонять в огороженное место другие десятки тысяч людей, пока таким образом не подсчитали всех. Затем воинов распределяли по племенам».

Геродот. История, книга VII

О записи больших чисел

«Отсюда очевидно, что количество песчинок, заключенных в сфере, ограниченной неподвижными звездами, диаметр которой был оценен Аристархом меньше, чем одна тысяча мириад единиц восьмого класса». Так завершает Архимед свой трактат под названием «О числе песчинок».

Что он имел в виду, когда говорил о единицах восьмого класса? Греческое слово *мириада* (*myriad*) означало десять тысяч; это число $M = 10^4$ Архимед называл *единицей первого класса.* За ним идет *octad*, т.е. мириада мириад, которое Архимед определил как *единицу второго класса.* Обозначим октаду символом Ω, тогда $\Omega = M^2 = 10^8$.

Можно предположить, что единицей третьего класса является число $M^3 = 10^{12}$, однако это не так. *Основанием* системы Архимеда была *октада* $\Omega = 10^8$. Таким образом, единицу класса n можно интерпретировать как Ω^{n-1}, и «количество песчинок во вселенной», по оценке Архимеда,

$$10^3 \times 10^4 \times (10^8)^7 = 10^{63}.$$

Говоря современным языком, эту оценку можно сформулировать следующим образом: количество песчинок... имеет *порядок* 10^{63}.

Поучительно сравнить эту оценку Архимеда с наибольшим «известным» простым числом, *семнадцатым гигантским простым числом Мерсенна*, которое было недавно вычислено в Институте анализа чисел в Лос-Анджелесе:

$$M = 2^{2281} - 1. \qquad (1)$$

Это целое порядка 10^{687}, и поскольку

$$687 = 85 \times 8 + 7,$$

то Архимед сказал бы, что это число порядка одна тысяча мириад восемьдесят шестого класса.

О принципах позиционирования

Многие из нас научились считать в раннем возрасте, и немногие с тех пор задумывались над этим предметом. Давайте немного освежим наши воспоминания.

Все начинается с координации между пальцами и губами. Ребенок учится связывать определенные наборы, образованные его пальцами или кубиками, с определенными словами. Ему говорят, что эти слова называются числами, и его заставляют выучить их в *определенной последовательности*. Со временем пальцев и кубиков становится мало, и он учится использовать изящный старомодный *риторический* прием, который позволяет расширить границы счета, не обращаясь к новым осязаемым наборам. После этого счет превращается в гонку чисел или в игру словами, игру, в которую ребенок поначалу просто активно играет. Но однажды он, в конце концов, осознает, *что все, что однажды было сказано или сделано, всегда можно повторить.* И теперь, останавливаясь внезапно на каком-либо члене числового ряда, он отбрасывает все остальное нетерпеливым «и так далее и так далее». В этот день его обучение процессу счета завершено. В этот момент в его мышлении зародился зачаток понятия, который спустя много лет приведет его в замешательство в виде *концепции бесконечности.*

Что же это за риторическая процедура, которая внушает окончательную уверенность в том, что процесс счета можно продолжать бесконечно? Несмотря на то, что мы овладеваем этой процедурой в очень раннем детстве, она основана на достаточно замысловатом математическом понятии. Суть ее заключается в том, что *любое положительное целое число может быть представлено, причем единственным образом, в виде многочлена, упорядоченного по степеням числа десять, и коэффициенты полинома могут быть только целыми, меньшими десяти.*

Как уже отмечалось в главе 2, выбор в качестве основания *числа 10* не был предопределен присущими этому целому числу свойствами, но явился прямым следствием *физиологической* случайности, поскольку подавляющее большинство нормальных людей имеет на руках десять пальцев. Этот физиологический аспект нашего языка чисел достаточно забавен, но еще больше удивляет *полиномиальная структура.* В самом деле, оказывается, что всякий раз, когда превратности судьбы вынуждают человека иметь дело с числами, которые нельзя сосчитать на пальцах, он неизменно прибегает к этому полиномиальному представлению.

Позиционная нумерация — это не что иное, как приспособление этой риторической процедуры к записи чисел; добавляя к диапазону допустимых коэффициентов символ 0, мы заполняем «пустоты», которые могут появиться в многочлене, и, следовательно, предотвращаем любые возможные неопределенности. Таким образом, $(abcd)$ это всего лишь *криптограмма*, сокращенная форма записи многочлена

$$aR^3 + bR^2 + cR + d = (abcd)_R,$$

где R — основание, а коэффициенты a, b, c и d могут принимать значения от 0 до $R - 1$. В качестве *основания системы счисления* можно выбрать любое положительное число, отличающееся от 1. Более того, поскольку арифметические операции, которые мы научились применять к числам, записанным в десятичной системе, берут свое начало в общих свойствах любых многочленов, то все эти правила можно легко адаптировать к системе с любым другим основанием.

Об истории десятичной запятой

Люди в полной мере пользовались позиционной записью в течение многих веков, прежде чем осознали, что среди преимуществ этого метода есть еще и значительная легкость при работе с дробями. Но даже и потом осознание этого было далеко не полным, что можно понять из громоздких верхних и нижних индексов, которые использовали Стевин и Напиер.

Теперь, чтобы схема стала вполне действенной, оставалось только ввести какой-то знак, такой как современная *десятичная точка*, чтобы отделить целую часть числа от дробной. Но по каким-то необъяснимым причинам новаторы того времени, за исключением Кеплера и Бригтса, либо не осознавали этот факт, либо не верили, что смогут склонить общественность принять такой знак. Действительно, через сто лет после открытия Стевина историк того времени, имея в виду множество противоречивых способов записи, заметил: *Quod homines tot setentiae* (сколько людей, столько и мнений). И потребовалось еще одно столетие, чтобы форма записи окончательно установилась и все излишние символы исчезли.

Автор	**Время**	**Способ записи**
До работы Стевина		$24\frac{375}{1000}$
Симон Стевин	1585	$24\ 3^{(1)}\ 7^{(2)}\ 5^{(3)}$
Франсуа Виет	1600	$24\,\vert_{375}$
Джон Кеплер	1616	24(375
Джон Напиер	1617	$24 : \overset{\vert}{3}\ \overset{\vert\vert}{7}\ \overset{\vert\vert\vert}{5}$
Генри Бриггс	1624	24^{375}
Вильям Отред	1631	$24\,\vert\,\underline{375}$
Балам	1653	24 : 375
Озанам	1691	$24 \cdot \overset{(1)}{3}\ \overset{(2)}{7}\ \overset{(3)}{5}$
Современная запись		24 · 375

О выборе основания

Предложение Бюффона изменить всеобщее основание системы счисления и использовать *двенадцать* вместо *десяти* удивительным образом получило второе рождение всего лишь в прошлом веке. Повсюду распространялись двенадцатиричные общества; выпускались брошюры и периодические издания, восхвалявшие достоинства числа *двенадцать* с усердием, похожим на религиозный пыл; решив «досадный» вопрос о символах для чисел *десять* и *одиннадцать*, реформаторы обратились к таблицам. Это были *таблица преобразования* в двенадцатеричную систему, *таблица умно-*

жения и даже таблица *двенадцатиричных логарифмов.* В конце концов эта священная война угасла, как и многие другие движения, целью которых было изменить многолетнюю привычку людей.

Совершенно иная судьба у другой реформы, более ранней по происхождению и даже более экзотической, чем та, что предложена Бюффоном. Речь идет о *двоичной арифметике* Лейбница. Увы! То, что было провозглашено монументом монотеизму, в конце концов стало начинкой роботов. Большинство современных высокоскоростных вычислительных машин работает в *двоичной* системе счисления. Роботов не связывают традиции людей, у них нет привычек, и их «память» управляется программно. Недостаток компактности двоичной системы записи с лихвой компенсируется громадной скоростью вычислений. Но и арифметические привычки людей-операторов не подверглись серьезным испытаниям, поскольку автоматические устройства легко переводят десятичные данные в двоичные и наоборот. Действительно, недалеко то время, когда человек, работающий с машиной, будет также мало знать о ее двоичном устройстве, как и о своих собственных внутренних органах.

Об изменении системы счисления

Ограниченное чувство числа у человека делает практически невозможным называть числа по модельным наборам, для которых они являются «количественной мерой». Другой путь заключается в соотнесении числа и символа, используемого при его записи. До того как появились арабские цифры, для этой цели использовались буквы алфавита, возможно, именно этому Гематрия обязана тем успехом, которого она достигла в наши дни. С появлением позиционной системы записи и ее повсеместным признанием десятичная запись числа автоматически обеспечивала ему название. В наши дни это стало больше чем названием: мы научились отождествлять число с его десятичной зашифровкой. И настолько велика сила привычки, что большинство из нас рассматривает любое другое представление чисел как своего рода маскировку; и это несмотря на то, что все мы осознаем, что нет ничего абсолютного или священного в основании десять.

Перевод числа из любой системы счисления в десятичную предполагает представление этого числа в виде многочлена. Возьмем в качестве примера сокращение $(4321)_5$; по определению:

$$(4321)_5 = 4 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 586.$$

Вычисления можно сделать менее сложными с помощью приема, который известен читателю под названием *деление с сохранением остатка*, хотя в большей степени ему соответствует название *подстановка с сохранением остатка*. Подробный алгоритм приведен в следующей таблице:

	4	3	2	1
		$(5 \times 4) + 3 = 23$	$(5 \times 23) + 2 = 117$	$(5 \times 117) + 1 = 586$
Частное	4	23	117	586
Остаток	4	3	2	1

Эта же таблица показывает, как переводить числа из десятичной системы в любую другую. Изменив направление на обратное, мы получим цепочку последовательных делений на новое основание, в данном случае на 5. *Остатки от деления являются цифрами искомой записи.*

В качестве примера давайте вычислим последовательные члены так называемой последовательности Мерсенна, общий член которой выражается формулой $M_p = 2^p - 1$. В двоичной записи эти целые выглядят как наборы единиц:

$$M_1 = 1,\ M_2 = (11)_2,\ M_3 = (111)_2,\ M_4 = (1111)_2,\ \ldots \qquad (2)$$

Описанный выше алгоритм предлагает удобный метод для вычисления этих целых:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M_p	1	$\underline{\underline{3}}$	$\underline{\underline{7}}$	15	$\underline{\underline{31}}$	63	$\underline{\underline{127}}$	255	511	1023

Подчеркнутые члены образуют последовательность *простых чисел*, которые называются *числами Мерсенна*. К ним я вернусь в следующем разделе (см. Приложение Б).

Задача Паскаля

Эпиграф к этой главе взят из работы Паскаля, озаглавленной «О делимости чисел, выведенной из их цифр». Проверка Паскаля делимости на число q тесно связана с представлением числа $\frac{1}{q}$ в виде десятичной *дроби*. Именно с этой точки зрения исследования Паскаля были продолжены его английским современником Джоном Валлисом, а в следующем веке Джон Бернулли, Эйлер и Ламберт расширили и углубили эту теорию.

Давайте проанализируем этот метод на примере представления в виде десятичной дроби числа $\frac{1}{q}$, где q — любое простое число, отличное от 2 и 5. Алгоритм преобразования в десятичную дробь — это знакомое нам деление в столбик; десятичная дробь, получающаяся в результате этого процесса, называется периодической, так как она состоит из бесконечного числа одинаковых «блоков». Каждый блок называется *циклом*, а количество цифр в блоке — *периодом* цикла. Таким образом, в случае $q = 7$ мы получаем

Частное	0,	1	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5	7 ...
Делимое	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 ...
Остаток	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1

В данном случае цикл $K = 142 = 857$ и период $p = 6$.

Частные, которые образуют цифры этой дроби, не принимались Паскалем во внимание. Он работал только с остатками, которые, за неимением лучшего, я буду называть *десятичными остатками делителя q*. Последовательность остатков периодическая, и *период цикла остатков определяет период десятичной дроби*. Из самой сути алгоритма следует, что каждый цикл остатков начинается с 1, и *никакие два остатка в этом цикле не могут быть равны*. С другой стороны, остатки могут принимать любые значения от 1 до $q - 1$, и, следовательно, период не может быть больше, чем $q - 1$. На самом деле, период либо равен $q - 1$, как в случае $q = 7$, либо равен одному из *делителей* числа $q - 1$, как в случае $q = 13$. В приведенной ниже таблице перечислены остатки от деления различных чисел, в соответствии с Паскалем. Они перечислены *справа налево*, чтобы согласовываться с порядком цифр в сокращенной записи.

Теперь я приведу рассуждения Паскаля для случая $q = 7$, который является типичным. Сначала давайте «разберем» подробно результаты деления в столбик:

$$\begin{array}{rlrlr} 1 = 0 \cdot 7 & + 1 & 10^3 = 142 \cdot 7 & + 6 & 10^6 = 142857 \cdot 7 + 1 \\ 10 = 1 \cdot 7 & + 3 & 10^4 = 1428 \cdot 7 & + 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10^2 = 14 \cdot 7 & + 2 & 10^2 = 14285 \cdot 7 & + 5 & \end{array}$$

Теперь рассмотрим трехзначное число

$$N = (CBA) = A \cdot 1 + B \cdot 10 + C \cdot 10^2.$$

Подставляя вместо степеней 10 их значения через 7, мы получим

$$N = 7 \cdot H + (A + 3B + 2C), \qquad (3)$$

где H — некоторое положительное целое число. Отсюда следует, что число N делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится число $A + 3B + 2C$.

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть R_1, R_2, R_3, ..., R_j, ... это остатки от деления на q, и пусть $N = (D_jD_{j-1} \dots D_1D_2D_3)$ — это число, которое мы проверяем на делимость на q. Тогда *N делится или не делится на q* в зависимости от того, *делится или не делится на q взвешенная сумма*:

$$P = R_1D_1 + R_2D_2 + R_3D_3 + \dots + R_jD_j. \qquad (4)$$

Десятичные остатки и циклы

Делитель q	**Период** p	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1
2		0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5		0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10		0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	2	1	10	1	10	1	10	1	10	1
13	6	9	10	1	4	3	12	9	10	1
17	16	16	5	9	6	4	14	15	10	1

Мы выразили теорему Паскаля в терминах *делимости*. Однако результат можно интерпретировать шире. В самом деле, из рассуждений следует, что *остаток от деления а числа N на q равен остатку от деления на q тестовой функции P* или, если использовать терминологию, введенную Гауссом, *числа P и N сравнимы (или даже равны) по модулю q*. Записывается это так:

$$N = P \pmod{q}. \qquad (5)$$

Значит, в случае $q = 9$ мы получаем, что $R_1 = R_2 = = R_3 = 1$ и, следовательно,

$$N = \sum D \pmod{9}. \qquad (6)$$

Это так называемое *правило девятки*, которое гласит, что *остаток от деления числа на 9 равен остатку от деления на 9 суммы его цифр*. В частности, *число делится на 9 тогда и только тогда, когда на 9 делится сумма его цифр*.

О цифрах и делителях

Тест Паскаля о делимости числа N на q применим для всех значений N и q; однако с практической точки зрения затраченный труд не всегда оправдан. Тем не менее некоторые правила, вытекающие из общей теоремы, представляют реальный интерес для практических вычислений. Прежде чем перейти непосредственно к изучению правил, следует отметить, что при проверке делимости на целое число q всегда можно заменить *тестовую функцию* Паскаля *P на равную ей по модулю q*, проще говоря, всегда можно *прибавить* к P или *вычесть* из P любое число, кратное q, что не повлияет на обоснованность результата теста. Например, критерий Паскаля делимости трехзначного числа (CBA) на 7 сводится к делимости на 7 числа $P = A + 3B + 2C$. Добавив к этому числу $7B$ и обозначив $10B + A = T$, мы получим более удобную тестовую функцию: $T + 2C$. Таким образом, число 581 делится на 7, потому что на 7 делится число $81 + 2 \cdot 5 = 91$.

I. *Проверка трехзначных чисел*: $N = (CBA)$, $T = (BA)$.

Модуль q	Ближайшее к 100 число, делящееся на q	Тест-функция
7	98	$2C + T$
9	99	$C + T$
13	104	$T - 4C$
17	102	$T - 2C$
19	95	$5C + T$
23	92	$8C + T$
29	87	$13C + T$
31	93	$7C + T$

Пример: $N = 912$, $T = 12$. N не делится на 17, так как $12 - 2 \cdot 9 = -6$, N делится на 19, так как $12 + 5 \cdot 9 = 57 = 19 \cdot 3$.

II. *Критерий делимости на 11.* Для числа 11 функция Паскаля выглядит следующим образом: $P = A + 10B + C + 10D + E + 10F + \ldots$ Вычитая из нее $11B + 11D + 11E + 11E + \ldots$ мы приведем критерий к более удобному виду: *Pў* $= A - B + C - D + E - F + \ldots$

Пример: $N = 399\,168$ делится на 11, так как $3 - 9 + 9 - 1 + 6 - 8 = 0$.

III. *Критерии для 7 и 13.* Их тоже можно получить из теоремы Паскаля. Однако в данном случае удобнее воспользоваться тем обстоятельством, что $1001 = 10^3 + 1$ *делится и на 7, и на 13* и, следовательно, числа $10^6 - 1 = 999\,999$; $10^9 + 1 = 1\,000\,000\,001$ и т.д. также делятся на 7 и на 13. Для конкретности, пусть N – любое девятизначное число, тогда мы можем записать

$$N = X + 1\,000Y + 1\,000\,000Z = X - Y + Z + 1\,001H. \qquad (7)$$

Таким образом, число N делится на 7 (или на 13), если на 7 (или на 13) делится число $X - Y + Z$. Это простое правило особенно хорошо приспособлено к современной тенденции записывать большие числа блоками по 3 цифры.

Пример: $N = 864\,192$. Здесь $864 - 192 = 672 = 7 \cdot 96$, поэтому N делится на 7, но не на 13.

Проверка остатка

Ничего не известно о том, кто открыл правило девятки и насколько давно оно используется; однако Паскаль в своей работе о делителях и цифрах, которую я цитировал ранее, ссылается на это правило как на нечто общеизвестное, а этой работе уже более трехсот лет. В менее изощренные времена счетоводы использовали это правило для проверки правильности сложения и умножения; сомневаюсь, чтобы современные бухгалтеры пользовались такой хитростью. Как бы то ни было, но с появлением современных вычислительных машин искусство устного счета так же устарело, как и каллиграфия.

Достаточно удивительно, но правило девятки выводится из принципа, выходящего за рамки тех тривиальных приложений, для которых он был первоначально разработан. В самом деле, эта методика остается в силе для любых модулей и любых систем исчисления, и ее изучение может служить прекрасным введением в теорию сравнений Гаусса, которую я упоминал в предыдущем разделе. Однако, чтобы избежать путаницы, я воспользуюсь более прямым подходом.

Если a – остаток от деления целого числа A на целое число q (речь идет о целых числах, разумеется), то я буду говорить, что a – это остаток числа A по модулю q, и буду записывать это как:

$$res\ A = a \ (\mathrm{mod}\ q). \qquad (8)$$

Остаток может принимать значения в диапазоне от 0 до $q - 1$, а $res\ A = 0 \ (\mathrm{mod}\ q)$ означает, что число A делится на q. Пусть теперь

A, B, C, ... конечное множество целых чисел, и пусть a, b, c, ... — их остатки по одному и тому же модулю q. Тогда нетрудно доказать, что

$$\begin{cases} res\,(A+B+C+\ldots)=res\,(a+b+c+\ldots) \\ res\,(A-B)=res\,(a-b) \\ res\,(A\cdot B\cdot C\cdot\ldots)=res\,(a\cdot b\cdot c\cdot\ldots) \\ res\,(A^m)=res\,(a^m) \\ res\,(A^m\cdot B^n\cdot C^p\cdot\ldots)=res\,(a^m\cdot b^n\cdot c^p\cdot\ldots), \end{cases} \tag{9}$$

где показатели степени m, n, p, ... — положительные целые числа.

Комбинируя эти свойства, мы можем распространить утверждение на *целочисленную функцию в самом общем виде, содержащую любое количество целых аргументов, коэффициентов и параметров.* Я буду называть эту общую теорему *принципом вычетов*; ее можно сформулировать следующим образом: пусть $F(x, y, z, \ldots)$ любая целочисленная функция и пусть подстановка $x = A$, $y = B$, $z = C$ и т.д. приводит к целому числу N. Пусть также $a, b, c, \ldots, n$ — остатки A, B, C, ..., N по некоторому модулю q, тогда

$$F(A, B, C, \ldots) = N \Rightarrow F(a, b, c, \ldots) = n. \tag{10}$$

Теперь давайте на нескольких представляющих исторический интерес примерах покажем, как можно использовать принцип вычетов для проверки вычислений.

Исторические примеры

I. Ферма сформулировал и Эйлер доказал, что уравнение $x^3 + y^3 = R^3$ не имеет решений в целых числах. С другой стороны, уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = R^3 \tag{11}$$

имеет *бесконечно много целых решений*. Некоторые из них, например (3,4,5;6) и (1,6,8;9), были известны уже Фибоначчи. Список решений, включающий более чем сто наборов чисел, был опубликован в 1920 году Г.У. Ричмондом. Вот одно решение из этого набора: (25,38,87;90). Чтобы проверить, что

$$25^3 + 38^3 + 87^3 = 90^3,$$

заметим, что два последних члена делятся на 9; следовательно, на 9 должна делиться и сумма первых двух слагаемых $25^3 + 38^3$; и в самом деле, $25 + 38 = 63$. С другой стороны, у чисел 25^3 и 90^3 есть общий делитель 125; следовательно, сумма $87^3 + 38^3$ тоже должна делиться на 125. И оказывается, $38 + 87 = 125$.

II. В этом же списке утверждается, что:

$$24^3 + 63^3 + 89^3 = 98^3. \qquad (12)$$

Так как числа 98 и 63 делятся на 7, то и сумма $24^3 + 89^3$ также должна делиться на 7. Проверяем

$$res\ 24^3 = res\ 3^3 = 6 \text{ и } res\ 89^3 = res\ 5^3 = 6.$$

Таким образом, $res\ (24^3 + 89^3)(\mathrm{mod}\ 7) = 5$, а не 0, из чего следует, что равенство неверно, хотя проверка через делимость на 9 и не выявляет ошибки.

III. Тесно связана с предыдущим вопросом и задача Рамануджана: найти целые числа, которые могут быть *представлены в виде суммы двух кубов более чем одним способом*. Например, $1\,729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$ – самое маленькое такое число. Давайте проверим, что

$$N = 1\,009\,736 = 96^3 + 50^3 = 93^3 + 59^3. \qquad (13)$$

Проверка остатков от деления на 9 дает нам, что все три числа имеют одинаковый остаток 8. С другой стороны, число N делится на 7, поскольку на 7 делится $736 - 9 + 1 = 728$. Проверка двух других чисел показывает, что $126 = 7 \cdot 18$, $35 = 7 \cdot 5$.

IV. Проверим, что

$$N = 12! + 1 = 479\,001\,601.$$

Поскольку 12! делится на любое целое число, меньшее *или* равное 12, то остаток от деления числа 479 001 601 на любое из этих чисел должен равняться 1. И читатель сам легко может это проверить. Дополнительную проверку обеспечивает *теорема Вильсона*, которая утверждает, что $12! + 1$ делится на *простое число* 13. И в самом деле,

$$res\ (479\,001\,601) = res\ (479 - 1 + 601) = res\ (1\,079) =$$
$$= res\ (78) = 0\ (\mathrm{mod}\ 13).$$

V. Как Эйлер обнаружил, что число *1 000 009 не является простым*, а представляет собой произведение простых чисел 293 и 3 143, написано повсюду (см. «Формула для вычисления простых чисел» в Приложении Б). Чтобы проверить, что

$$1\,000\,009 = 293 \cdot 3\,413,$$

мы для начала воспользуемся проверкой делимости на 9. Суммы цифр составляют соответственно 10, 14 и 11, остатки равны 1, 5 и 2 и окончательно остаток $5 \cdot 2 = 1$. Теперь проверим остатки от деления на 7: *res* (1 000 009) = *res* (9 + 1) = 3 (mod 7), *res* (293) = *res* (93 + 4) = 6 (mod 7), *res* (3 413) = *res* (410) = *res* (10 + 8) = = 4 (mod 7) и *res* (4 · 6) = 3 (mod 7).

VI. Никакой простой множитель трехзначного числа не может превышать 31, поскольку $31^2 < 1\,000 < 37^2$. Поэтому таблицу тестовых функций можно успешно использовать для проверки того, *является ли простым любое 3-значное число*. На с. 54 я упоминал, что пятое число Ферма $2^{2^5} + 1$ делится на 641. Является ли число 641 простым? В данном случае $C = 6$, $T = 41$, и поскольку $29^2 > 641$, то нужно проверить следующие простые числа: 7, 11, 13, 17, 19 и 23. Нетрудно убедиться, что 641 не делится нацело ни на одно из этих чисел, в силу чего мы заключаем, что число 641 — простое.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

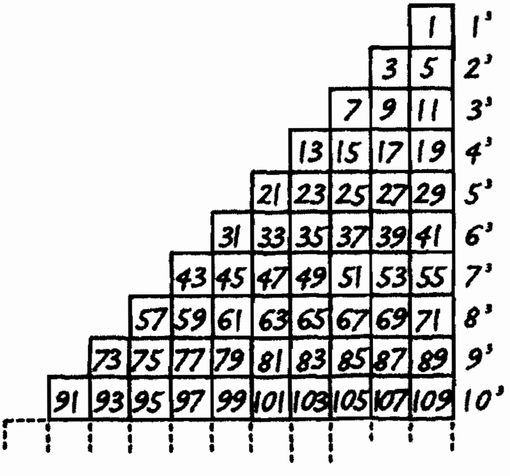
ИСТОРИИ О ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

> Мы имеем красивую и наиболее общую теорему, а именно, что каждое число – или квадрат, или сумма двух, трех или самое большее четырех квадратов. Это одна из самых недоступных тайн числа, и невозможно представить доказательство на полях этой страницы.
>
> *Ферма*

Два арифметических треугольника

Использование образцов для выявления свойств целых чисел не умерло вместе с пифагорейской школой. *Арифметический треугольник* Паскаля именно такой случай. Менее известно, если не сказать более, элегантно предложенное Фибоначчи доказательство тождества

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2. \qquad (14)$$



									1	1^3
								3	5	2^3
							7	9	11	3^3
						13	15	17	19	4^3
					21	23	25	27	29	5^3
				31	33	35	37	39	41	6^3
			43	45	47	49	51	53	55	7^3
		57	59	61	63	65	67	69	71	8^3
	73	75	77	79	81	83	85	87	89	9^3
91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	10^3

Рис. 1. Арифметический треугольник Фибоначчи

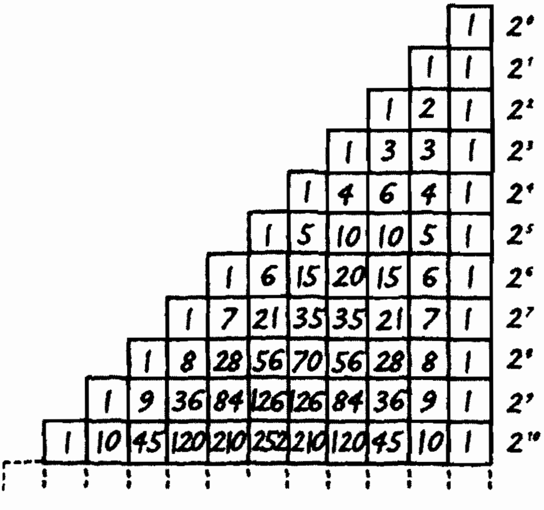
Выстроив последовательные нечетные числа в виде треугольника, как показано на рис. 1, Фибоначчи заметил, что каждые k членов k-го ряда образуют арифметическую прогрессию *со средним значением, равным* k^2. Следовательно, сумма членов k-го ряда равна $k \times k^2$ или k^3. А сумма всех членов в n последовательных рядах равна $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$. С другой стороны, в силу утверждения, которое обычно приписывают самому Пифагору, ***сумма первых** p **нечетных целых чисел равна*** p^2. Поэтому

$$S = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2.$$

Треугольник Паскаля был построен для того, чтобы выявить соотношения между расположенными по порядку ***биномиальными коэффициентами***. Давайте будем обозначать через (α, β) коэффициент при члене $x^\alpha y^\beta$. В разложении $(x + y)^p$ содержится такой член, если $\alpha + \beta = p$. В нем также содержится член $xx^{\alpha - 1}y^{\beta + 1}$. С другой стороны, *биномиальное разложение* $(x + y)^{p + 1}$ содержит член $x^\alpha y^{\beta + 1}$. Между коэффициентами этих двух «смежных» членов существует следующее соотношение:

$$(\alpha, \beta) + (\alpha - 1, \beta + 1) = (\alpha, \beta + 1). \tag{15}$$

В этом заключается *рекурсивный закон Паскаля.*



										1	2^0
									1	1	2^1
								1	2	1	2^2
							1	3	3	1	2^3
						1	4	6	4	1	2^4
					1	5	10	10	5	1	2^5
				1	6	15	20	15	6	1	2^6
			1	7	21	35	35	21	7	1	2^7
		1	8	28	56	70	56	28	8	1	2^8
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	2^9
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	2^{10}

Рис. 2. Арифметический треугольник Паскаля

Если правда, что именно размышления над этим «мистическим треугольником» привели Паскаля к формулировке *принципа математической индукции*, то этот арифметический треугольник надлежит поместить в Музей истории математики. Хотя как технический инструмент он мало повлиял на дальнейшее развитие в этой области. Частично это было обусловлено ограниченностью метода, который не допускал простых обобщений ни в том, что касалось разложений многочленов, ни для отрицательных или дробных значений степеней. Также сам вид рекурсивного закона Паскаля скрывал достаточно важную связь между *биномиальными* коэффициентами и *факториалами*. Хотя основную причину неудачи можно найти в истории того периода, который последовал за великим триумвиратом: Декарт, Паскаль и Ферма. Появление анализа бесконечно малых затмило великие достижения этих людей, и больше всего теория чисел пострадала главным образом из-за этого «затмения».

Полиномиальное разложение

Выражение

$$(x + y + z + \dots + w)^p,$$

где p — положительное целое число и *аргументы* $x, y, z, \dots w$ — любые объекты, подчиняющиеся алгебраическим законам, называется *полиномом степени p*. Если раскрыть скобки, то мы получим многочлен степени p, который будет *симметричен* относительно n аргументов, т.е. его внешний вид не изменится, если *поменять местами* аргументы $x, y, z \dots$; более того, коэффициенты при старших членах, т.е. при x^p, y^p, $z^p \dots$, всегда равны 1. Сначала Лейбниц, а вслед за ним и Эйлер выражали это эффективно в виде тождества:

$$(x + y + z + \dots + w)^p - (x^p + y^p + z^p + \dots + w^p) = S(x, y, z, \dots w). \quad (16)$$

Многочлен S является не только симметричным, но и *однородным*, т.е. показатели степеней, вводящих в состав многочлена одночлены $Mx^\alpha y^\beta z^\gamma \dots w^\upsilon$, могут принимать значения в диапазоне от 0 до $p - 1$, но для них выполняется следующее условие

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \upsilon = p. \quad (17)$$

Коэффициент M при этом одночлене является положительным целым и называется *полиномиальным коэффициентом степени p*.

Эти *полиномиальные коэффициенты* можно довольно изящно выразить в виде «псевдодробей» через факториалы. Действительно, либо при помощи *математической индукции*, либо через *комбинаторику* можно показать, что если обозначить коэффициент при одночлене $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots w^\upsilon$ символом $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \upsilon)$, то

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \upsilon) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\upsilon)!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\upsilon!} = \frac{p!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\upsilon!} \qquad (18)$$

при условии, что мы *заменим 0! везде, где он будет встречаться, на 1.*

Я назову это выражение *псевдодробью*. Впервые оно встречается в печати в посмертной работе Якоба Бернулли «Ars Conjectandi» («Искусство предположений»), опубликованной в 1713 году. Сегодня мы сказали бы, что эта работа посвящена *комбинаторному анализу* и *теории вероятностей*. Нужно сказать, что вопрос о том, Якоб первым придумал эту формулу, или его брат Джон, или Лейбниц, или один из многочисленных математиков, с которыми они переписывались, является спорным.

Как теорема о полиномах работает на практике, можно показать на примере *трехчлена пятой степени*. Вот что получается:

$$\left\{\begin{array}{l} (x+y+z)^5 = x^5 + y^5 + z^5 + 5(x^4y + xy^4 + y^4z + \\ + yz^4 + z^4x + zx^4) + 10(x^3y^2 + x^2y^3 + y^3z^2 + \\ + y^2z^3 + z^3x^2 + z^2x^3) + 20(x^3yz + xy^3z + xyz^3) + \\ + 30(xy^2z^2 + x^2yz^2 + x^2y^2z). \end{array}\right. \qquad (19)$$

Подробности этих вычислений приведены в следующей таблице, правильность их можно проверить подстановкой в тождество $x = y = z = 1$.

Тип слагаемого	Количество слагаемых	Коэффициент	Проверка
x^5	3	1	$1 \times 3 = 3$
x^4y	6	5!/(4!)=5	$5 \times 6 = 30$
x^3y^2	6	5!/(3!2!)=10	$10 \times 6 = 60$
x^3yz	3	5!/(3!)=20	$20 \times 3 = 60$
x^2y^2z	3	5!/(2!2!)=30	$30 \times 3 = 90$
	21		$3^5 = 243$

Малая теорема Ферма

Вот наиболее простая формулировка этой теоремы: *если R — любое положительное целое число, а p — любое простое число, то $R^p - R$ делится на p.* Например, при $R = 2$:

$$2^2 - 2 = 2,\ 2^3 - 2 = 3 \cdot 2,\ 2^5 - 2 = 5 \cdot 6,\ 2^7 - 2 = 7 \cdot 18. \qquad (20)$$

Частный случай этой малой теоремы был известен еще в Древнем Китае.

Эту теорему часто формулируют немного иначе, а именно: *если число R не делится на простое число p, то на p делится* $R^{p-1} - 1$. Отсюда следует, например, что если p – это простое число, отличное от 2 и 5, то на него делится число $10^{p-1} - 1 = 999 \dots 99$. Это означает, что при соответствующем выборе количества цифр в записи 999...9, полученное число будет делиться на любое простое число, отличное от 2 и 5, и, более того, на любое целое число Q, которое *не делится* ни на 2, ни на 5. Это обстоятельство тесно связано с критерием делимости на Q, а также с периодом десятичной дроби $1/Q$.

Утверждение, *обратное малой теореме, не является верным в общем случае*, как видно из следующих контрпримеров:

I. $341 = 11 \cdot 31$, значит это число *не является простым*, тем не менее число $N = 2^{340} - 1$ делится на 341, поскольку один из делителей N – это $2^{10} - 1 = 31 \cdot 33 = 3 \cdot 341$.

II. $121 = 11^2$, это число *не является простым*. Однако $N = 3^{120} - 1$ делится на 121, поскольку $3^5 - 1 = 242 = 121 \cdot 2$.

История малой теоремы очень интересна. Ферма сообщил о ней, не приводя доказательства, в письме своему другу Френиклу (де Бесси) в 1640 году. В печати она появилась в сборнике работ Ферма, изданном его сыном посмертно примерно в 1660 году. Очевидно, она не произвела никакого впечатления на математиков того времени. Именно поэтому, когда спустя 40 лет ее заново открыл Лейбниц, он смог безнаказанно произнести: «Вот истинная формула для простых чисел, которой ни один аналитик до меня не знал». Это высказывание предполагает веру в истинность и обратной теоремы, что однако трудно понять. Невозможно представить, что Лейбницу не были известны хотя бы те простые контрпримеры, которые приведены выше.

По иронии судьбы, вклад Лейбница в малую теорему Ферма постигла та же судьба, что и оригинал. Во всяком случае, в десятилетие между 1730 и 1740 годом, хотя Эйлер и много писал по этому вопросу, но он ни разу не упомянул Лейбница, несмотря на то, что в одном из своих доказательств Эйлер вывел теорему как прямое следствие *формулы многочлена*, так же как до него это сделал Лейбниц.

Предположим, что степень p многочлена является *простым числом*. Тогда, поскольку показатели степени α, β, γ, ... меньше, чем p, то знаменатель псевдодроби не содержит множителей, которые могли бы сократиться с p, значит число $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ в этом случае кратно p. Отсюда следует важная лемма: *все коэффициенты многочлена степени p, где p — простое число, делятся на p.* В силу этой теоремы полиномиальное тождество из предыдущего раздела приобретает следующий вид:

$$(x + y + z + \ldots + w)^p - (x^p + y^p + z^p + \ldots + w^p) = pH(x, y, z, \ldots w), \quad (21)$$

где $H(x, y, z, \ldots w)$ — это многочлен с положительными целыми коэффициентами.

Из этой леммы вытекает множество разнообразных следствий, используемых в теории чисел, и малая теорема является одним из самых простых и наиболее важных. Пусть в тождестве (21) $x = y = \ldots = w = 1$, $H(1, 1, 1, \ldots 1) = N$, тогда

$$n^p - n = Np \text{ или } n(n^{p-1} - 1) = Np. \quad (22)$$

Значит, если n не делится на простое число p, то на него делится $n^{p-1} - 1$.

Именно так Лейбниц и доказал малую теорему Ферма. Одно из доказательств Эйлера отличается от него лишь фразеологией; другое доказательство является замечательным примером *использования математической индукции.* Основной прием доказательства заключается в том, чтобы рассматривать число *p как фиксированное и R — как переменное.* Для $R = 1$ получаем $1^p - 1 = 0$. Мы установили базу индукции. Предположим теперь, что утверждение теоремы верно для некоторого значения R, т.е. $R^p - R = Ap$, где A — положительное целое число. Рассмотрим теперь выражение $(R + 1)^p - (R + 1)$. В силу вышеупомянутой леммы $(R + 1)^p - R^p - 1 = Bp$, при условии, что p — простое число. Следовательно,

$$(R + 1)^p - (R + 1) = R^p - R + Bp = (A + B)p.$$

Что и требовалось доказать.

О теореме Вильсона

История этого утверждения демонстрирует роль пересказа другими словами в математических рассуждениях. В 1770 году Эдвард Варинг опубликовал книгу под названием «Meditationes Algebraicae» («Алгебраические рассуждения»). Там, в частности, сказано: «Если число p простое, то величина

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p - 1) + 1}{p} \quad (23)$$

является целым числом... Это элегантное свойство простых чисел — открытие знаменитого Джона Вильсона, человека весьма искушенного в области математики». Это страстное восхищение Вильсоном не следует воспринимать слишком серьезно, поскольку есть веские причины полагать, что со стороны Варинга это была уплата «политического» долга. Он добавляет: «Такие теоремы очень трудно доказывать, из-за отсутствия обозначений для выражения простых чисел». Комментируя этот отрывок, Гаусс произнес свою знаменитую остроту «*notationes versus notiones*», означающую, что в вопросах такого рода имеет значение не *терминология*, а *концепция*.

Несмотря на пессимистические предсказания Варинга, эта теорема была доказана независимо Эйлером и Лагранжем через несколько лет после ее опубликования. Но методы, использованные этими мастерами, выходили далеко за рамки проблемы, которая их вдохновила, и именно по этой причине были непрямыми и запутанными. По контрасту с ними доказательство Гаусса, приведенное ниже, настолько простое и прямое, что даже читатель с минимальной математической подготовкой сможет понять и оценить его.

Теорема Вильсона эквивалентна следующему соотношению:

$$(p - 1)! = Wp - 1, \tag{24}$$

где W — целое число. Поскольку мы ограничим анализ значениями p, большими 3, то мы можем считать, что W больше 1. Поэтому можно сделать замену $W = G + 1$, после чего уравнение (24) примет вид:

$$(p - 1)! = Gp + (p - 1). \tag{24'}$$

Теперь теорему можно переформулировать следующим образом: *если p простое число, то остаток от деления* $(p - 1)!$ на p равен $(p - 1)$. С другой стороны, $(p - 1)! = (p - 1) \cdot (p - 2)!$, и задача сводится к доказательству того, что *остаток от деления* $(p - 2)!$ *на простое число p равен 1.*

Для доказательства последнего утверждения Гаусс использовал метод, который, за неимением лучшего названия, я назову *составлением пар.* Я продемонстрирую его применение с помощью таблицы, например, для случая $p = 11$. Данная таблица, фактически, не что иное, как *таблица умножения до 10 включительно*, только содержащая не сами произведения, а их *остатки по модулю 11.*

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
9	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Этот массив чисел обладает следующими свойствами:

1. *Если любые два элемента таблицы равны, то им соответствуют два числа, разность которых делится на 11.*

2. *Ни в одной строке и ни в одном столбце нет двух одинаковых элементов.*

3. Поскольку каждая строка состоит всего из $p - 1$ элементов, *каждый из $p - 1$ остатков представлен в каждой строке один и только один раз.*

4. *Остаток 1 встречается в каждой строке.*

Последнее означает, что с каждым целым числом k из последовательности 2, 3, ..., $p - 2$ можно связать другое целое число K, такое, что $k \cdot K \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

В случае $p = 11$ мы можем перегруппировать произведение $(p - 2)!$ следующим образом:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 8 \cdot 9 = (2 \cdot 6)(3 \cdot 4)(5 \cdot 9)(7 \cdot 8).$$

Каждое взятое в скобки произведение дает при делении на 11 остаток 1, а значит, это верно и для произведения всех этих пар. Поэтому

$$9! \equiv 1(\mathrm{mod}\ 11) \Rightarrow 10! \equiv (\mathrm{mod}\ 11) \Rightarrow 10! + 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 11)$$

или $10! + 1 = 11N$, что и является теоремой Вильсона для случая $p = 11$.

Применяя аналогичные рассуждения в общем случае, мы придем к заключению, что если p простое число, то $p - 3$ множителей 2, 3, 4, ..., $p - 2$ можно разбить на $\frac{p-3}{2}$ связанных пар, таких, что остаток по модулю p произведения чисел каждой пары будет равен 1; значит, остаток произведения всех *связанных пар* также будет равен 1. Отсюда мы заключаем, что, если число p простое, остаток по модулю p числа $(p - 1)!$ будет равен $p - 1$, а в этом и заключается теорема Вильсона в версии Гаусса.

Таблица на с. 57 построена на основе еще одной формулировки теоремы Вильсона. Пусть w_p – это остаток от деления $[(p - 1)! + 1]$ на p, который мы будем называть *индексом Вильсона целого числа p*. Тогда теорема Вильсона заключается в том, что *индекс простого числа равен 0*; и наоборот, *если индекс числа p равен 0, то это число простое.* А что произойдет, если число p составное? Ответ: *индекс Вильсона для любого составного числа, отличающегося от 4, равен +1.*

Последнее утверждение есть не что иное, как другая формулировка теоремы: *если p – составное число, большее 4, то* $(p - 1)!$

делится на p. Доказательство: пусть в первом случае p — составное число, но не квадрат простого числа; тогда оно представляет собой произведение двух различных целых чисел, причем оба эти числа меньше, чем $p - 1$, и, следовательно, входят в произведение $(p - 1)!$. Пусть теперь $p = q^2$, где q — нечетное простое число; тогда и q, и $2q$ меньше, чем $p - 1$, а из этого следует, что и q, и $2q$ входят в $(p - 1)!$ и, значит, последнее делится на $2q^2$ и, следовательно, на p.

Если мы исключим из рассмотрения целые числа, меньшие 4, то все вышесказанное можно обобщить следующим образом: *индекс простых чисел равен 0, составных — 1.* Таким образом, мы можем представить натуральный ряд как бесконечную двоичную дробь, в которой цифра 1 обозначает составное целое число, а цифра 0 — простое.

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} ,010111 & 0101110101 & 1101111101 & 0111110111 & 0101110111 \\ 1101111101 & 0111110111 & 0101111101 & 1101111101 & 1111110111 \end{array}\right. \tag{25}$$

Первая цифра этой дроби представляет число $p = 5$, последняя $p = 100$.

О проблемах языка

Закон нулевого множителя, о котором я буду много говорить в следующих разделах, накладывает условие, что *произведение не может быть равно нулю, если хотя бы один из множителей не равен нулю.* Или, в символической записи, соотношение $u \cdot v = 0$ означает, что или $u = 0$, или $v = 0$, или $u = v = 0$. В теории чисел можно сформулировать аналогичное утверждение: *если произведение нескольких целых чисел делится на простое число p, то на это число делится по крайней мере один из сомножителей.* Если использовать терминологию и символы, введенные Гауссом, схожесть между этими двумя утверждениями становится еще более поразительной.

Если числа a и b дают одинаковый остаток при делении на p, то Гаусс говорит, что эти числа *сравнимы по модулю p,* и записывает $a \equiv b \pmod{p}$. В частности, запись $c \equiv 0 \pmod{p}$ означает, что *c делится на p.* Используя эту систему записи, мы можем переписать аналог закона нулевого множителя следующим образом: Если p простое число и $uv \equiv 0 \pmod{p}$, то или $u \equiv 0 \pmod{p}$, или $v \equiv 0 \pmod{p}$, или $u \equiv v \equiv 0 \pmod{p}$.

Рассмотрим теперь многочлен $G(x)$ степени n. При каких целых значениях x, если такие имеются, многочлен $G(x)$ делится на данное простое число p? Это задача Лагранжа. В формулировке Гаусса она выглядит следующим образом: *Найти решения сравнения* $G(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Однако при этом переходе аналогия между уравнением и сравнением сталкивается с некоторыми трудностями: если a — решение сравнения, то и $a + np$ — также будет решением, при любом целом n. Лагранж преодолел эту трудность, предложив использовать *наименьший положительный* член прогрессии $a + np$ для определения всей последовательности. Гаусс назвал такое решение *минимальным корнем*. Например, сравнение $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ имеет бесконечное количество решений: 2, 7, 12, 17, ...; 3, 8, 13, 18, ... но только *два различных корня*, 2 и 3.

При помощи этой терминологии Лагранж сформулировал две фундаментальные теоремы. Первая из них заключается в том, *что сравнение степени n может иметь не больше n различных корней.* Вторая гласит, что *если многочлен степени n делится на p при более чем n неконгруэнтных значениях переменной x, то он делится на p при любом значении x.*

Последнее утверждение привело Лагранжа к открытию удивительной взаимосвязи между малой теоремой Ферма и теоремой Вильсона. Рассмотрим многочлен

$$G(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\ldots[x-(p-1)] - (x^{p-1}-1), \quad (26)$$

где p — простое число. Тогда мы находим:

$$G(1) = 0,\ G(2) = 2^{p-1} - 1,\ G(3) = 3^{p-1} - 1, \ldots, G(p-1) = (p-1)^{p-1}.$$

В силу малой теоремы все эти числа делятся на *простое число p*, поэтому сравнение $G(x) \equiv 0 \pmod{p}$ имеет $p - 1$ *неконгруэнтных решений*. С другой стороны, степень многочлена равна всего лишь $p - 2$; отсюда следует, что многочлен $G(x)$ делится на p при всех значениях x, и в частности при $x = 0$. Значит

$$G(0) \equiv [(p-1)! + 1] \equiv 0 \pmod{p}. \quad (27)$$

А это и есть теорема Вильсона.

Решето Эратосфена, показанное на с. 51, и двоичная дробь (25) показывают, что простые числа среди первой сотни целых чисел распределены случайно. Эта неравномерность сохраняется и даже еще больше приводит в замешательство, если мы заглянем глубже в натуральный ряд. Тот, кто захочет найти гармонию или смысл в их причудливом расположении, должен оценить некоторые цифры и факты и узнать о развеявшихся иллюзиях.

Между 101 и 113 есть 5 простых чисел, но ни одного – между 114 и 126. Мы находим 23 простых числа между 1 и 100 и 21 простое число между 101 и 200, а между 8 401 и 8 500 всего 8 простых чисел, и эти 8 чисел теснятся в интервале между 8 418 и 8 460. А чтобы у читателя не возникло ошибочных идей, я поспешу добавить, что между 89 501 и 89 600 есть 13 простых чисел.

Достоверно о первых 10 000 000 чисел известно только то, что среди них есть 664 580 простых чисел. За исключением этого приходится зависеть от оценочных теорий и формул. Первая такая формула была предложена Лежандром в 1808 году. Основывая свои выводы на эмпирическом анализе таблицы множителей Эйлера, он получил приближенную формулу:

$$x/\pi(x)\overset{\infty}{=}\ln(x)-B, \tag{28}$$

где $\pi(x)$ означает количество простых чисел, которые меньше или равны x, $\ln x$ – это натураяьный логарифм x, а B медленно меняющаяся величина, в среднем равняющаяся 1,08.

Альтернативная приближенная формула была предложена Гауссом:

$$\pi(x)\overset{\infty}{=}\int_2^x\frac{\mathrm{dx}}{\ln x}. \tag{29}$$

С этого момента этот интеграл получил название интегрального логарифма и стал табулироваться как $Li(x)$.

Гаусс предположил, что *отношение* $\pi(x)/Li(x)$ *стремится к 1 при* $x\to\infty$, и это предположение было доказано бельгийским математиком Ла Валле Пуссеном в 1896 году. Формула Лежандра была преобразована Чебышевым из эмпирического закона в математическое предположение. В 1848 году этот русский математик доказал, что если отношение $\pi(x)$ к $(x/\ln(x))$ действительно имеет предел, то этот предел должен быть равен 1. Существование предела было доказано французским математиком Адамаром в 1896 году. Теорема Чебышева–Адамара теперь известна как *теорема о числе простых чисел.*

Адамар доказал теорему о числе простых чисел *методами аналитической теории чисел*, т.е. с помощью бесконечных процессов. Многие эксперты утверждали, что прямое арифметическое доказательство теоремы никогда не появится, но в 1950 году такое доказательство было предложено, благодаря совместным усилиям Сэлберга и Эрдоса.

Насколько осторожно следует делать выводы из теоремы о числе простых чисел, видно из следующего примера: последовательность, состоящая из одного миллиона чисел:

$$1\,000\,001! + 2;\ 1\,000\,001! + 3;\ \ldots;\ 1\,000\,001! + 1\,000\,001, \qquad (30)$$

представляет собой «сплошной блок» составных чисел, поскольку число $N! + k$ делится на k, если k больше 1 и меньше $N + 1$. Отсюда следует, что количество простых чисел в этом интервале равно нулю, в то время как в соответствии с приближенной формулой можно было бы предположить, что простые числа присутствуют в любом конечном интервале достаточно большой длины.

Формула для вычисления простых чисел

Задача эта восходит еще к Ферма. Суть ее заключается в нахождении такой функции $G(x)$, которая давала бы в результате простые числа при подстановке в нее любых целых значений аргумента x. Искомая функция должна включать только операции сложения и умножения, так чтобы на любом шаге вычислений: начальном, промежуточном, или финальном — мы имели дело *исключительно с целыми числами*. Удобно было бы называть такую функцию *арифметической* или *целочисленной*, но, поскольку эти термины уже заняты, я предлагаю называть ее *характеристической*. Примером характеристической функции является *многочлен с целыми коэффициентами*. Вот другие примеры:

$$a^x + b,\ a^{G(x)} + H(x),\ G(x)^{H(x)} + K(x), \qquad (31)$$

где a, b — целые числа, G, H и K — многочлены с целыми *положительными* коэффициентами.

Несмотря на наложенные строгие ограничения, разнообразие характеристических функций чрезвычайно велико, поэтому естественно поинтересоваться, а будет ли хоть одна из них давать простые числа при подстановке в нее любых целых значений x. До сих пор такая функция не найдена; но и невозможность существования такой формулы не доказана. С другой стороны, было доказано, что определенные типы характеристических функций не могут давать в результате только простые числа. Одним из самых ранних предположений такого рода является теорема Эйлера о том, что *любой характеристический многочлен хотя бы при одном значении аргумента дает в результате составное число.*

Теорема Эйлера основана на следующей алгебраической лемме: если $P(x)$ — любой многочлен, то многочлен вида

$$Q(x) = P[x + P(x)]$$

содержит $P(x)$ в качестве сомножителя. Пусть $P(x) = x^2 + 1$, тогда

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x +(x^2 + 1)]^2 + 1 = \\ &= (x^2 + 1)^2 + 2x(x^2 + 1) + x^2 + 1 = \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2x+ 2). \end{aligned} \qquad (32)$$

Доказательство леммы в общем виде напоминает приведенный пример и является вполне формальным; так что я предоставляю читателю возможность самому ее доказать.

Предположим теперь, что $P(x)$ — характеристический многочлен; a — любое целое число и $b = P(a)$. Тогда, в силу этой леммы, значение $P(a + b)$ делится на b и, следовательно, является составным, при условии $b \neq 1$. Заметим, что если степень многочлена $P(x)$ равна n, то в соответствии с фундаментальной теоремой алгебры, существует не больше n значений, для которых $P(x) = 1$, поэтому теорема Эйлера может быть усилена следующим образом: *любой характеристический многочлен дает в результате бесконечное количество составных чисел.*

С рассмотренным вопросом тесно связан и другой вопрос: существует ли характеристическая функция, которая, возможно, не принимая *исключительно* простые значения, дает *бесконечное количество* простых значений? Теорема Евклида предполагает утвердительный ответ на этот вопрос, поскольку, очевидно, можно утверждать, что *линейная функция* $G(x) = 2x + 1$ *может принимать значения бесконечно большого количества простых чисел.* Эйлер и Лежандр принимали без доказательств, что это же справедливо и для таких арифметических прогрессий, как $3x + 1$, $3x + 2$, $4x + 1$ и $4x + 3$, а Гаусс предположил, что *любая арифметическая прогрессия содержит бесконечное количество простых чисел* при условии, что *первый член и разность прогрессии являются взаимно простыми* или, что то же самое, что линейная функция вида

$$G(x) = px + q \qquad (33)$$

принимает бесконечное количество простых значений при условии, что целые числа p и q являются взаимно простыми. Это предположение в 1826 году доказал Дирихле, при этом в доказательстве он использовал очень тонкие аналитические аргументы.

С другой стороны, все попытки обобщить методы Дирихле на случай нелинейных функций до сих пор остаются безуспешными. На самом деле несмотря на колоссальные успехи, достигнутые в этой области со времен Дирихле, все же не было открыто *ни одной нелинейной* характеристической функции, о которой можно было бы утверждать с математической определенностью, что она принимает бесконечное количество простых значений.

Вот несколько классических примеров, показывающих текущее состояние дел:

I. *Квадратичная функция* $G(x) = x^2 + 1$. Чтобы $G(x)$ было простым, необходимо, чтобы число x оканчивалось либо на 4, либо на 6. Это условие дает нам последовательность значений 17, 37, 197, 257, ... Из первых 66 членов только 12 будут простыми. Известно много больших простых чисел этого типа, но вопрос о том, конечно или бесконечно множество, до сих пор остается неясным.

II. *Функция Мерсенна* $G(x) = 2^x - 1$. Как уже упоминалось, простые значения $G(x)$ называются числами Мерсенна, и на сегодняшний день известно только 17 таких чисел. Предположение о том, что существует бесконечное количество простых чисел Мерсенна, остается недоказанным.

III. *Функция Ферма* $G(x) = 2^x + 1$. Для любых целых вида $x = 2^pM$, где M — нечетное, *необходимым* условием, чтобы значение $G(x)$ было простым, является $M = 1$. Это приводит нас к числам Ферма, упомянутым на с. 52. Здесь можно добавить, что эти числа играют важную роль в геометрии, поскольку фундаментальная теорема Гаусса состоит в том, что *правильный многоугольник с n сторонами можно построить при помощи циркуля и линейки тогда и только тогда, когда n — это простое число Ферма или свободное от квадратов произведение простых чисел Ферма.* Но и здесь вопрос о том, конечно или бесконечно множество простых чисел Ферма — одна из нерешенных проблем теории чисел.

Пифагоровы тройки

В наши дни эти тройки чисел привели ко многим открытиям в области теории чисел; они также породили большое количество удивительных задач, которые еще ожидают своего решения. Толчок этому современному развитию дал Ферма, который в своих заметках на полях сформулировал без доказательств множество теорем, касающихся этих чисел; теорем, которые спустя столетие или позже были подтверждены и усилены Эйлером, Лагранжем, Гауссом и Лиувиллем.

Для упрощения дальнейшего рассказа я буду называть любое целое решение уравнения

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (34)$$

треугольником с *катетами x*, *y* и *гипотенузой R*. Треугольник является *примитивным*, если его элементы не имеют общих множителей, в противном случае он будет *импримитивным*. Если (x, y, R) является треугольником, то очевидно (nx, ny, nR) также им является. Таким образом, из любого примитивного треугольника можно получить бесконечное количество импримитивных треугольников, что выдвигает примитивные треугольники на передний план. Некоторые свойства последних вытекают непосредственно из определения и были известны еще в древности. Вот самые важные из них: (*a*) *множество примитивных треугольников бесконечно;* (*b*) *любые два элемента примитивного треугольника взаимно просты;* (*c*) катеты простого треугольника всегда имеют *разную четность,* в то время как гипотенуза *всегда нечетна.*

Ферма начал с предположения, которое неявно использовалось Диофантом, Фибоначчи и Виетом; а именно, что *гипотенуза пифагоровой тройки может быть представлена как сумма двух квадратов*. То есть если R — это «допустимая» гипотенуза, то существуют такие целые числа p и q, что

$$p^2 + q^2 = R. \qquad (35)$$

То, что это условие *достаточно,* следует из тождества

$$(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2, \qquad (36)$$

поскольку тогда уравнению (34) удовлетворяет тройка:

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ R = p^2 + q^2, \qquad (37)$$

где p и q — любые целые числа. Доказательство того, что это *достаточное* условие также и *необходимо*, основано на более тонких аргументах, которые требуют больше пространства, чем я могу выделить.

Уравнения (37) выполняются для импримитивных треугольников, так же как и для примитивных. Однако нетрудно заметить, что, ограничивая значения *параметров p* и *q взаимно простыми* числами и *противоположной четности*, мы автоматически исключим все импримитивные треугольники. Это ясно видно из приведенной таблицы, где каждый элемент получен сложением квадратов четного и нечетного чисел. Вычеркнутые числа приводят к *импримитивным треугольникам*, так как порождающие их параметры не являются взаимно простыми. С другой стороны, подчеркнутые элементы соответствуют *простым гипотенузам*, которые, как мы потом увидим, играют фундаментальную роль в подходе Ферма к проблеме пифагоровых троек.

	4	16	36	64	100	144	196	...
1	5	17	37	65	101	145	197	...
9	13	25	~~45~~	73	109	~~153~~	205	...
25	29	41	61	89	~~125~~	169	221	...
49	53	65	85	113	149	193	~~245~~	...
81	85	97	~~117~~	145	181	~~225~~	227	...
121	125	137	157	185	221	265	317	...
169	173	185	205	233	269	313	365	⋱
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Но определить, что данное нечетное число может быть представлено в виде суммы двух квадратов, достаточно сложно. Конечно, сумма квадратов четного и нечетного чисел всегда имеет вид $4n + 1$, что автоматически исключает любые члены следующей прогрессии

$$4n - 1: \qquad 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \ldots$$

Но, к сожалению, явной принадлежности к прогрессии

$$4n + 1: \qquad 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ \ldots$$

недостаточно. Например, 9 не может быть представлено в виде суммы двух квадратов, так же как 21 или 33. И действительно, именно трудность с нахождением достаточного условия воспрепятствовала Виету, блестящему предшественнику Ферма.

Ферма преодолел эту трудность, устанавливая различие между *простыми и составными* гипотенузами. В дальнейшем я буду называть соответствующие треугольники *элементарными* и *составными*. Примеры элементарных треугольников: (3, 4, 5); (5, 12, 13) и (15, 8, 17), примеры составных — (7, 24, 25); (63, 16, 65) и (33, 56, 65). В своем доказательстве Ферма использовал одну из своих собственных знаменитых теорем, записанных на полях; а именно: *любое простое число вида* $4n + 1$ *может быть представлено как сумма двух квадратов и, более того, единственным образом.* Как обычно, запись на полях не сопровождалась доказательством; однако в письме к Робервалю Ферма утверждает, что у него есть строгое доказательство, основанное на его методе *бесконечного спуска.* Спустя 125 лет Эйлер впервые опубликовал доказательство этой леммы, основанное на принципе спуска.

Непосредственное следствие этой теоремы заключается в том, что *любое простое число вида* $4n + 1$ *является допустимой гипотенузой*. А как насчет составных чисел такого вида? На этот вопрос Ферма так отвечает в своих заметках на полях:

Пусть $R = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$, где p, q, r, ... нечетные простые числа, а α, β, γ, ... положительные целые числа. Тогда следует рассмотреть четыре случая:

I. *Все простые множители имеют вид* $4n + 1$. Тогда уравнение Пифагора допускает по крайней мере одно *примитивное* решение.

II. *Все простые множители имеют вид* $4n + 1$. Тогда уравнение (34) *не имеет решений.*

III. *По крайней мере один простой множитель имеет вид* $4n + 1$, *в то время как любые простые делители вида* $4n - 1$ *входят в произведение только в четной степени.* Тогда уравнение (34) имеет только *импримитивные* решения.

IV. *Любые простые множители вида* $4n - 1$ *входят в произведение в нечетной степени.* Тогда у уравнения вообще *нет решений*, ни примитивных, ни импримитивных.

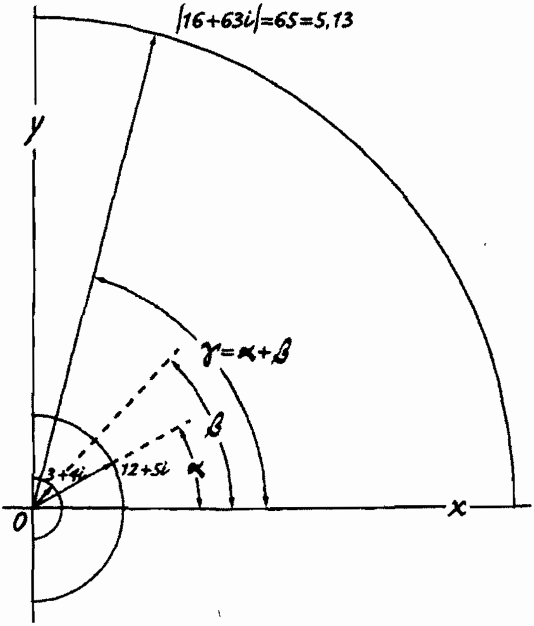


Рис. 3. Составные треугольники и комплексные целые числа

Подход Ферма показывает, что уравнение Пифагора не только действительно имеет бесконечное количество примитивных решений, как догадывались в древности, но и бесконечное количество *элементарных* решений. Их можно использовать в качестве строительного материала для построения всех остальных решений, примитивных и импримитивных. Такой процесс построения чисто формальный и полностью эквивалентен *умножению комплексных чисел* (см. рис. 3). Мы в самом деле можем интерпретировать «комплексное целое» $x + iy$ как стороны треугольника, а его абсолютное значение $R = |x + iy|$ как его гипотенузу. Произведение двух таких комплексных чисел равно

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(x'y + xy') \tag{38}$$

и элементы этого нового числа приводят к новому решению уравнения (34) в силу тождества

$$(xx' - yy')^2 + (x'y + xy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2). \tag{39}$$

Как обстоят дела с этой задачей на сегодняшний день? Предположим, что вас попросили найти треугольники, которые допускают некоторое заданное целое число R в качестве гипотенузы. Последние две цифры этого числа позволят определить, имеет ли R вид $4n + 1$; и тогда следующий шаг заключается в нахождении простых множителей числа R, что в случае больших чисел может стать трудноразрешимой проблемой. Предположим, однако, для продолжения рассуждений, что нам удалось доказать, R — простое число. Тогда существует единственный треугольник, для которого R может являться гипотенузой, и вопрос сводится к решению Диофантова уравнения: $p^2 + q^2 = R$. Эта последняя задача, в свою очередь, была сведена Лагранжем к анализу *непрерывной (цепной) дроби*, связанной с $\sqrt{R}$. С тех пор были разработаны и другие методы, позволяющие справиться с этой задачей; но, вообще говоря, проблема определения *квадратов, составляющих целое число*, по крайней мере, так же сложна, как разложение целого числа на простые множители. При таких обстоятельствах вряд ли можно определенно заявить о том, что эта древняя проблема исчерпывающе разрешена.

Случай с Эйлером

В статье, опубликованной в 1774 году, Эйлер перечислил несколько больших простых чисел, среди которых было 1 000 009. В следующей статье Эйлер признал свою ошибку и привел разложение этого числа на простые множители

$$1\,000\,009 = 293 \times 3\,413. \tag{40}$$

Он пишет, что в момент опубликования первой статьи ему казалось, что число 1 000 009 *допускает единственное представление в виде суммы квадратов*, а именно: $1\,000\,009 = 1\,000^2 + 3^2$; но затем он нашел, что есть и *второй способ*: $235^2 + 972^2$, а это означает, что число является составным.

После этого Эйлер продолжает искать делители числа 1 000 009, следуя методу, предложенному в доказательстве теоремы, представленной в предыдущей статье. В теореме, которая напоминает о заметке Ферма, сделанной на полях, утверждается, что *если нечетное число R более чем одним способом можно представить в виде суммы двух квадратов, то число R составное*. Метод Эйлера основан на простой лемме, действительно настолько простой, что большинство читателей могло бы счесть ее не требующей доказательств. Если даны две дроби A/B и a/b и последняя является *несократимой*, тогда *равенство $A/B = a/b$ подразумевает существование целого числа n, такого, что $A = na$ и $B = nb$.*

Давайте теперь переформулируем задачу. Предположим, что

$$R = p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2, \tag{41}$$

тогда надо доказать, что R составное, и найти его делители. Для начала перепишем (41) в виде пропорции

$$p^2 - p'^2 = q^2 - q'^2 \text{ или } \frac{p+p'}{q'-q} = \frac{q'+q}{p-p'} = \frac{a}{b},$$

где числа a и b предполагаются взаимно простыми. Применив далее вышеприведенную лемму, мы получим четыре соотношения:

$$\begin{aligned} p + p' &= ma & \qquad q' + q &= na \\ q' - q &= mb & \qquad p - p' &= nb. \end{aligned}$$

Возведя все эти равенства в квадрат и сложив их, мы получим

$$(m^2 + n^2)(a^2 + b^2) = 2(p^2 + q^2 + p'^2 + q'^2) = 4R. \tag{42}$$

Отсюда можно заключить, что если числа a и b имеют различную четность, то $a^2 + b^2$ является одним из искомых делителей R; если же и a, и b нечетны, то делителем R является ${}^1/_2(a^2 + b^2)$.

Если этот метод применить к $R = 1\,000\,009 = 1\,000^2 + 3^2 = 235^2 + 972^2$, мы получим следующую пропорцию:

$$\frac{1972}{238} = \frac{232}{28} = \frac{58}{7}.$$

Следовательно, $a = 58$, $b = 7$, $a^2 + b^2 = 3413$, и это число является одним из двух искомых делителей.

Как Эйлер наткнулся на второе разложение в сумму двух квадратов, не записано. Изумительное чувство числа и феноменальная память этого мастера вычислений просто поражают, но что делает тайну еще более удивительной, так это тот факт, что в то время когда это случилось, Эйлеру было уже около 70 лет и он был абсолютно слеп в течение более десяти лет и частично слеп еще до этого.

О совершенных числах

Здесь я приведу в свободном пересказе доказательство Эйлера теоремы Евклида о том, что *любое четное совершенное число имеет вид* $2^{p-1}(2^p - 1)$, *где нечетный множитель является простым числом*; и наоборот, *если M — это число Мерсенна, т.е. простое число вида $2^p - 1$, то $2^{p-1}M$ — совершенное число.*

Любое четное число может быть представлено в виде $P = 2^{p-1}M$, где $p > 1$ и M — нечетное. Обозначим через S сумму всех нечетных делителей P, а через Σ — сумму всех делителей, включая и само P. Пусть $\Sigma = S - M$. Заметим, что $\Sigma = 1$, если M простое число, и $\Sigma > 1$, если M составное число.

Связь между двумя суммами S и Σ можно выразить при помощи следующего общего соотношения

$$\Sigma = S + 2S + 2^2S + \ldots + 2^{p-1}S = S(2^p - 1). \qquad (43)$$

Если мы предположим теперь, что P является совершенным числом, мы получим еще одно условие $\Sigma = 2P = 2^pM$. Отождествляя эти два значения Σ, мы получим уравнения:

$$S = 2^p\Sigma \qquad M = (2^p - 1)\Sigma. \qquad (44)$$

Из первого видно, что S четно, что позволяет нам заключить, что Σ нечетно. Второе уравнение предполагает два варианта: или $\Sigma = 1$ и M — простое число, или M — составное число и Σ является делителем M. Вторая гипотеза означала бы, что у P есть как минимум три нечетных делителя — 1, M и Σ, что невозможно, поскольку сумма этих трех чисел равна $1 + S$, в то время как сумма *всех нечетных делителей* равна S. Отсюда следует, что $\Sigma = 1$ и M – простое число; а уравнение (44) тогда показывает, что $M = 2^p - 1$.

Примерно те же идеи лежат в основе доказательства Сильвестра того, что *нечетное совершенное число – если оно существует – должно иметь, по крайней мере, три простых делителя.* Давайте сначала предположим возможность единственного простого делителя. Если x простое число, а P – совершенное число вида x^m, тогда

$$x^m = 1 = x + x^2 + \ldots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1}. \qquad (45)$$

Это приводит нас к соотношению $x^m(2 - x) = 1$, что очевидно невозможно.

Также совершенное число не может иметь вид $P = x^m y^n$, где x и *y различные нечетные простые числа.* В самом деле, пусть X и Y – суммы делителей x^m и y^n соответственно и пусть Σ – сумма всех делителей числа P. Тогда, поскольку P предполагается совершенным, то $\Sigma = 2P$. Но, с другой стороны, $\Sigma = XY$; приравнивая эти два выражения для Σ, мы получим

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^m)(1 + y + y^2 + \ldots + y^n) = 2x^m y^n$$

или

$$(x^{m+1} - 1)(y^{n+1} - 1) = 2(x - 1)(y - 1)x^m y^n.$$

Чтобы доказать, что такое равенство невозможно, Сильвестр преобразует его следующим образом

$$\left(1 - \frac{1}{x^{m+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{y^{n+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right) \qquad (46)$$

и замечает, что правая часть достигает минимального значения при $x = 3$, $y = 5$, в силу чего не может быть меньше, чем 16/15, а левая часть никогда не превосходит 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

О КОРНЯХ И РАДИКАЛАХ

> Любое кубическое или биквадратное уравнение можно, в конечном итоге, свести или к трисекции угла или к удвоению куба.
>
> *Виет*

Наследство финикийцев

Общепринятая теория, что и греки, и иудеи обязаны своими системами записи финикийцам, в значительной степени подтверждается схожестью в названиях символов: сравните греческие *альфа*, *бета*, *гамма* с иудейскими *алеф, бет, гиммель*. Также важно то обстоятельство, что, приспосабливая метод финикийцев для своих собственных нужд, иудеи, так же как и греки, сохранили у себя двойственный характер системы. В самом деле, каждая буква алфавита была не только записью звука, но и символом числа. Одним из результатов этого стала *Гематрия*, обсуждавшаяся в главе 3. Однако двойственность, присущая греческой записи, имела и другие последствия, которые влияли на дальнейшее развитие математики тем или иным способом.

Итак, была ли *фонетическая запись* изобретена каким-то неизвестным финикийским гением, или финикийцы унаследовали свою систему письма от более древних цивилизаций, одно можно сказать наверняка, этим методом столь обширные усовершенствования были внесены в весь предыдущий опыт методов записи, что он не подвергся значительным изменениям при адаптации его греками. Одно из существенных преимуществ заключалось в том, что система записи требует так мало символов, что даже человек со средними способностями мог легко запомнить буквы в определенном порядке. *Порядковый* аспект алфавита делает его естественным аналогом процесса счета. Но эта связь никоим образом не совершенная, поскольку в греческом алфавите содержится двадцать две буквы, в то время как в позиционной системе записи при десятичной структуре устного языка чисел требуется только десять символов. Греки же использовали каждую из букв как цифру, что, несомненно, сильно затруднило открытие принципа позиционной записи, без которого реальный прогресс в арифметике невозможен.

Этот двойственный характер греческого алфавита затормозил также и развитие других отраслей математики. Сегодня мы знаем, что никакой существенный прогресс в алгебре невозможен до тех пор, пока не появятся средства для обозначения *абстрактных* величин, известных или неизвестных, переменных или постоянных и, в частности, тех неопределенных констант, которые мы сегодня называем *коэффициентами* или *параметрами*. Но прежде чем этого удалось достичь, буквам пришлось освободиться от своих численных значений. Появление арабских цифр стало важным шагом в этом направлении. Однако так сильны были традиции, что лишь незначительный прогресс был достигнут за почти четыреста лет, отделяющих Виета от Фибоначчи. Конечно, итальянские математики шестнадцатого века разработали методы решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени, но их решения не выражались в общем виде, а демонстрировались на типичных числовых примерах. Так все продолжалось до 1592 года, когда Виет опубликовал работу о *буквенных обозначениях*, которая окончательно освободила буквы от тех оков, в которые их заковали финикийцы.

Принцип Гарриота

Здесь я расскажу о роли нуля в той области алгебры, которая называется теорией уравнений. Точнее говоря, мы рассмотрим процедуру, которая заключается в *переносе всех членов* уравнения в одну сторону от знака равенства, т.е. приведения к виду $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен.

Я называю эту процедуру *принципом Гарриота*. Томас Гарриот, географ, бывший одно время наставником сэра Уолтера Рэли, первый топограф территории Вирджинии, при жизни не заслужил репутации математика. Фактически, этот принцип увидел свет только в 1631 году, спустя почти 10 лет после смерти Гарриота. Но даже тогда честь этого открытия воздавали другому человеку, поскольку вскоре после публикации книги Гарриота «Praxis» («Практика аналитического искусства...»), появилась книга Декарта по аналитической геометрии, в которой философ широко использовал идеи Гарриота, но, верный себе, нигде не упоминал источник. И так велика была слава Декарта, что почти столетие этот открывающий новую эру принцип все считали достижением Декарта.

Я использовал выражение *открывающий новую эру*, потому что, несмотря на предельную простоту этого принципа, его историческое значение стоит в одном ряду с введением Виетом буквенных обозначений. Прежде всего, подход Гарриота позволяет *свести решение уравнения к разложению многочлена на множители*, что значительно улучшает технику работы с уравнениями. Далее это привело к изучению отношений, связывающих корни уравнения с его коэффициентами, благодаря чему появилось множество более поздних теоретических разработок, таких как *симметричные функции*, *основная теорема алгебры*, *функции комплексного переменного.*

Чтобы понять источник такого поразительного изобилия, нам следует вспомнить, что действительные и комплексные величины, к которым применяется этот принцип, подчиняются не только формальным законам алгебры, но также и *закону нулевого множителя*. Если выразить его словами, то суть заключается в том, что *произведение не может быть равно нулю, если по крайней мере один из сомножителей не равен нулю.* Или в символьной записи — соотношение $u \cdot v = 0$ подразумевает, что или $u = 0$, или $v = 0$, или $u = v = 0$.

Но если именно этот закон придал принципу Гарриота такое большое значение, то почему же ни сам Гарриот, ни множество других математиков, применявших этот принцип на протяжении двух веков после него, не упоминали закон нулевого множителя хотя бы косвенно? Ответ заключается в том, что прежде чем высказывать некоторое утверждение, необходимо иметь возможность представить себе альтернативу *закону нулевого произведения*; а во времена Гарриота, когда даже на комплексные числа смотрели с нескрываемым подозрением, это было невозможно. И я осмелюсь сказать, что сама идея создания алгебраического кода и поиска математических сущностей, которые подчинялись бы этому коду, рассматривалась большинством математиков семнадцатого и восемнадцатого веков как бред сумасшедшего.

Уравнения и тождества

Подход Гарриота, обсуждавшийся в предыдущем параграфе, выявил удивительную связь между *алгебраическими уравнениями* и *полиномиальными функциями*, и можно предположить, что эти два понятия взаимозаменяемы. Однако сейчас мы увидим, что аналогия еще далека от завершенности, и если зайти слишком далеко, то можно получить результаты, граничащие с абсурдом.

Никаких трудностей не возникает, если заданное уравнение определено однозначно, т.е. когда все коэффициенты соответствующего полинома могут быть выражены из условия задачи. Однако так бывает довольно редко: многие задачи как в чистой, так и в прикладной математике зависят от *переменных параметров*, и коэффициенты уравнений, к которым может сводиться любая из таких задач, являются не постоянными, но функциями от этих параметров. В результате этого приходится иметь дело не с одним уравнением, а с *множеством уравнений*.

Таким образом, *общий вид квадратичной функции* одной переменной определяется формулой:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c. \tag{47}$$

Предположим теперь, что неопределенные параметры a, b и c могут принимать любые рациональные значения, положительные, отрицательные или ноль. Тогда множество Q включало бы в себя не только «настоящие» квадратичные функции, но и такие функции, как

$$\begin{cases} Q(x) = 0 \cdot x^2 + bx + c & (b \neq 0) \\ Q(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c & (b \neq 0) \\ Q(x) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0. \end{cases} \tag{48}$$

Графически это можно интерпретировать, если сказать, что функцию $y = Q(x)$ представляют не только *параболы*, но и *прямые*, включая прямые параллельные оси x и саму ось x.

Однако если мы попытаемся рассматривать такие частные случаи как уравнения, то обнаружим, что не можем позволить себе настолько широкой интерпретации. В самом деле, с точки зрения чистой алгебры, соотношение $0 \cdot x^2 + bx + c = 0$ является не *квадратным*, а *линейным уравнением*; соотношение $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + c = 0$ $(c \neq 0)$ вообще не уравнение, поскольку *не имеет смысла*; соотношение $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$ не уравнение, *тавтология*. Более того, поскольку эти сложности присущи *определению числа ноль*, их нельзя избежать с помощью таких формальных механизмов, как процедура Гарриота. В самом деле, мы видим, что эта процедура бесполезна без закона нулевого множителя, который, в свою очередь, всего лишь следствие тех условий, на которых ноль допущен в числовое множество.

Поэтому «настоящее» уравнение — это не обязательно полиномиальное отношение — оно может быть тождеством или не иметь смысла. Достаточно удивительно, но сама эта неопределенность может превратиться в эффективный инструмент доказательства тождеств. Метод вытекает из утверждения: *если полиномиальному отношению степени n от переменной x удовлетворяют более чем n различных значений x, то это отношение является тождеством,* т.е. ему удовлетворяют *любые значения x.*

Рассмотрим для примера квадратное соотношение:

$$P(x) = (b - c)(x - a)^2 + (c - a)(x - b)^2 + (a - b)(x - c)^2.$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что

$$P(a) = P(b) = P(c) = (a - b)(b - c)(c - a).$$

Таким образом, этому соотношению удовлетворяют более чем два значения x, и, следовательно, это тождество, т.е.

$$\begin{aligned}&(b - c)(x - a)^2 + (c - a)(x - b)^2 + (a - b)(x - c)^2 \equiv\\ &\equiv (a - b)(b - c)(c - a).\end{aligned} \tag{49}$$

В качестве второго примера рассмотрим соотношение:

$$\begin{aligned}&\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\\ &+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}=1.\end{aligned} \tag{50}$$

Обозначим левую часть этого соотношения через $P(x)$ и заметим, что эта кубическая функция принимает значение 1 при четырех значениях x. В самом деле, нетрудно убедиться, что

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1,$$

откуда мы заключаем, что данное соотношение является тождеством.

О кубических и квадратных уравнениях

Подозрение Лагранжа, что корни уравнения степени выше четвертой в общем случае нельзя выразить при помощи радикалов, было подтверждено Абелем и Галуа. Доказательство выходит за рамки данной книги, однако понять суть проблемы можно, изучив методы, примененные Эйлером и Лагранжем для уравнений третьей и четвертой степени; методы, которые, в частности, продемонстрировали всю важность принципа Гарриота для методов решения уравнений.

Рассмотрим тождество

$$H(x) = x^3 + a^3 + b^3 - 3abx \equiv$$
$$\equiv (x + a + b)(\ x^2 + a^2 + b^2 - ax - bx - ab). \qquad (51)$$

Если рассматривать a и b как заданные величины, а x — как неизвестное и интерпретировать тождество как уравнение, то это означает, что *приведенное* кубическое уравнение $H(x) = 0$ имеет корень: $x = -a - b$. В общем виде приведенное кубическое уравнение имеет вид

$$x^3 + ux + v = 0 \qquad (52)$$

и всегда возможно установить тождество между уравнениями (51) и (52), определяя a и b через u и v как корни квадратного уравнения. Действительно, мы получим:

$$a^3 + b^3 = v;\ -3ab = u \Rightarrow a^3b^3 = -\frac{u^3}{27}, \qquad (53)$$

что означает, что a^3 и b^3 являются корнями следующего уравнения

$$y^2 - vy - \frac{u^3}{27} = 0. \qquad (54)$$

Если мы обозначим через A и B корни этой *квадратной резольвенты*, то $x = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$ является корнем кубического уравнения. Выполнив детально все указанные вычисления, мы получим *формулу Кардано для решения уравнения третьей степени.*

Примерно так же Лагранж подошел к решению приведенных уравнений четвертой степени

$$x^4 + ux^2 + vx + w = 0. \qquad (55)$$

Из тождества

$$(a + b + c + x)\ (a - b - c + x)(-a + b - c + x)(-a - b + c + x) =$$
$$= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + x^2a^2 + x^2b^2 + x^2c^2) + 8abcx = H(x) \qquad (56)$$

следует, что

$$x = -a - b - c,\ -a + b + c,\ a - b + c,\ a + b - c$$

являются корнями приведенного уравнения четвертой степени $H(x) = 0$.

Возможно ли так определить a, b и c, чтобы уравнения (55) и (56) были идентичны? Итак, мы получаем уравнения:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{-u}{2},\ abc=\frac{v}{8};$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2=\frac{u^2-4w}{16},$$

откуда можно сделать вывод, что a^2, b^2, c^2 являются корнями следующего уравнения

$$y^3+\frac{u}{2}y^2+\frac{u^2-4w}{16}y-\frac{v}{8}=0. \qquad (57)$$

Если мы обозначим A, B и C корни *кубической резольвенты*, тогда

$$x=-\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C},-\sqrt{\mathrm{A}}+\sqrt{B}+\sqrt{C},\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C},\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$$

являются искомыми корнями уравнения четвертой степени. Обратите внимание, что *подкоренные выражения A*, *B* и *C* включают в себя кубические корни.

Этот изящный подход подсказывает вопрос: почему метод, такой удачный в случае уравнений третьей и четвертой степеней, нельзя приспособить для уравнений *пятой* и более высоких степеней? Ведь можно построить некое симметричное тождество из n параметров и степени n, аналогично тому, как это сделали Лагранж и Эйлер; рассматривая один из параметров как неизвестное, интерпретировать это тождество как уравнение; отождествив последнее с уравнением степени n в общем виде, установить соотношение между параметрами и коэффициентами, что, наконец, приведет к нас к уравнениям, аналогичным *резольвентам* Эйлера и Лагранжа.

На самом деле, в этом направлении было предпринято несколько попыток, из которых наиболее примечательна работа Мальфатти. Резольвента Мальфатти для уравнения пятой степени в общем виде имела *шестую* степень, из чего сделан вывод о том, что степень m резольвенты уравнения степени n определяется формулой:

$$m=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Отсюда следует, что для любых значений $n > 4$ *степень резольвенты выше степени исходного уравнения.*

Геометрия и графики

Греческие историки приписывают открытие *конических сечений* Менехму, современнику Платона и ученику Евдокса, именно его выдающийся ум, как утверждают, вдохновил Евклида на написание книги «Элементы». Говорят, что Менехм наткнулся на эти «геометрические места точек», когда решал задачу *об удвоении куба*, т.е. в поисках решения уравнения $x^3 = 2$; и что он решил задачу о *параболе* и окружности. Подробности этого решения неизвестны, но один из возможных вариантов представлен на рис. 4. Здесь показан общий принцип решения *двучленного кубического уравнения* $x^3 - N = 0$. Уравнение параболы: $y = x^2$. Окружность «резольвенты» строится на отрезке OP как на диаметре; P – это точка: $x = N$, $y = 1$. Следовательно, уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 - Nx - y = 0. \tag{58}$$

Исключая y из двух уравнений, мы получим $x^4 - Nx = x(x^3 - N) = 0$. Парабола и окружность пересекаются в точках O и Q, и абсцисса последней $x = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$.

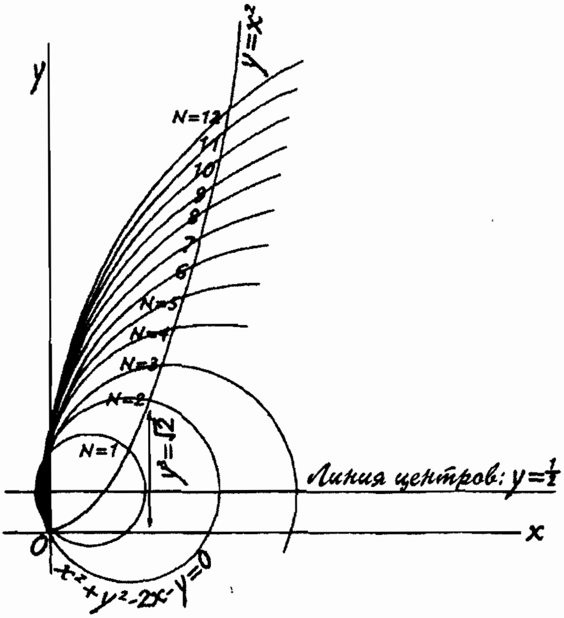


Рис 4. Графическое извлечение кубических корней

Значительное правдоподобие высказанному выше предположению придает тот факт, что спустя примерно пятнадцать веков Омар Хайям предложил графическое решение уравнений третьей и четвертой степеней в общем виде, основанное на том же принципе, т.е. *пересечениях фиксированной параболы и движущейся окружности*. Исключая y из уравнений

$$x^2 + y^2 + ux + vy + w = 0 \text{ и } y = x^2,$$

мы получим уравнение четвертой степени

$$x^4 + (v + 1)x^2 + ux + w = 0.$$

Пусть *дано уравнение четвертой степени*:

$$x^4 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = 0,$$

тогда приравнивая коэффициенты, мы получим

$$u = \mathrm{B},\ v = \mathrm{A} - 1,\ w = \mathrm{C}.$$

Это полностью определяет окружность «резольвенты» через коэффициенты данного уравнения четвертой степени. Если уравнение кубическое, положим $\mathrm{C} = 0$, что приведет к $w = 0$: в этом случае *окружность резольвенты пройдет через начало координат.*

На рис. 5 показано применение метода Омара Хайяма для *трисекции произвольного угла*. Данный угол $\phi = x\mathrm{OM}$ представлен точкой M на единичной окружности, так что $a = \cos\phi = \mathrm{HC}$. Формула тройного угла:

$$\cos\phi = 4\cos^3\frac{\phi}{3} - 3\cos\frac{\phi}{3} \tag{59}$$

приводит к кубическому уравнению:

$$x^3 - 3x - 2a = 0, \tag{60}$$

где $x = 2\cos\frac{\phi}{3}$. Центр окружности резольвенты C имеет координаты $x = a$, $y = 2$. Пусть Q — точка в первом квадранте, общая для окружности и параболы; и пусть P — проекция Q на окружность с центром в точке O и радиусом 2. Тогда угол $x\mathrm{OP}$ является искомым.

Графическое решение квадратного уравнения

$$x^2 - ax + b = 0,$$

где a и b — любые действительные числа, показано на рис. 6. Здесь окружность резольвенты построена на отрезке UP как на

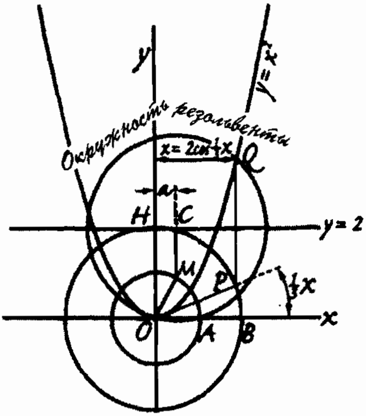


Рис. 5. Применение параболы для трисекции угла

диаметре, причем P – точка с координатами (a, b), а U – единичная точка на оси y. Точки X и X′, в которых окружность резольвенты пересекает ось x, представляют графическое решение квадратного уравнения. Если окружность не пересекает или только касается оси x, то корни являются мнимыми; хотя и в этом случае корни могут быть представлены графически с помощью простого построения, показанного на рис. 7. Проведем касательную OT к окружности резольвенты. Пусть окружность с центром в точке O и радиусом OT пересекается с прямой CM в точках Z и Z′.

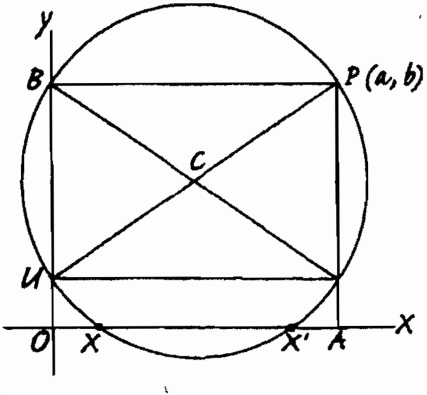


Рис. 6. Графическое решение квадратного уравнения с действительными корнями

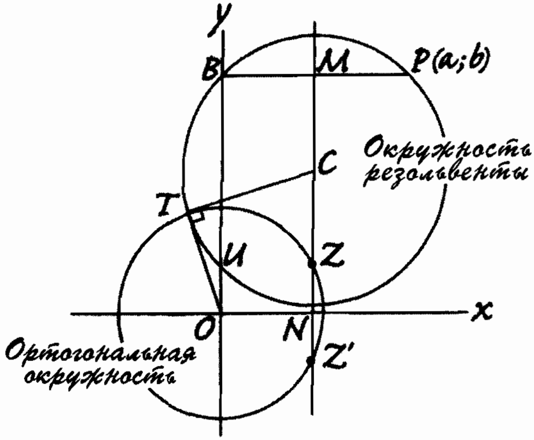


Рис. 7. Графическое построение комплексных корней квадратного уравнения

Тогда эти точки будут соответствовать корням квадратного уравнения на плоскости комплексного переменного $x + iy$.

Алгоритм Евклида

Разложение числа в *непрерывную дробь* – это вариант процедуры, приведенной в Книге VII «Элементов», и по этой причине называется *алгоритмом Евклида.* Евклид использовал этот метод для определения *наибольшего общего делителя двух целых чисел*, но алгоритм имеет и много других приложений. В этом и в последующих параграфах я буду обсуждать три проблемы: *непрерывные дроби, неопределенные уравнения* и *иррациональные числа.*

Обозначим как [Г] *целую часть положительного числа* Г. Например,

$$\left[\frac{22}{7}\right]=3, \left[\sqrt{2}\right]=1, [\pi]=3, [e]=2, [1]=1, [0]=0.$$

Теперь предположим, что число Г является *рациональным.* Если это число является целым, тогда Г = [Г]; если Г не целое число, тогда существует рациональное число $\Gamma_1 > 1$, такое, что $\Gamma = [\Gamma] + 1/\Gamma_1$. Γ_1 может быть целым; а если нет, переходим к следующему шагу алгоритма; а именно $\Gamma = [\Gamma] + 1/\Gamma_2$, и продолжаем этот процесс до тех пор, пока не будет получено целое число, например Γ_n. В результате мы придем к *непрерывной дроби*:

$$\Gamma=[\Gamma]+\cfrac{1}{[\Gamma_1]+\cfrac{1}{[\Gamma_2]+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{\Gamma_n}}}}, \qquad (61)$$

которую я для удобства сокращу до

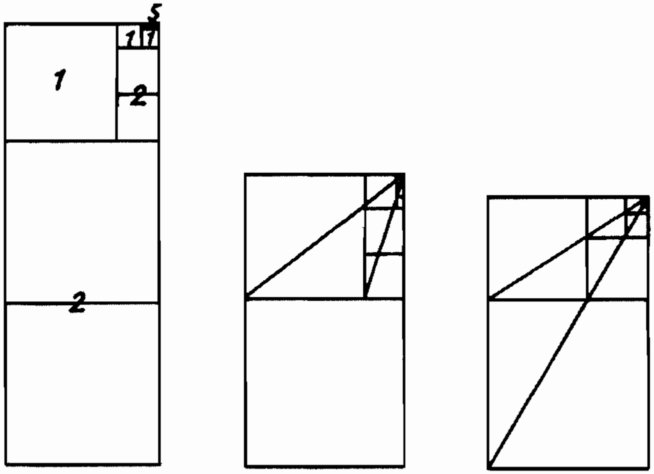
$$\Gamma = ([\Gamma];\ [\Gamma_1],\ [\Gamma_2],\ \ldots,\ \Gamma_n). \qquad (61')$$

В качестве примера возьмем $\Gamma=\frac{106}{39}$, которое является *приближением числа e* с точностью в пределах 0,04%. Подробности его разложения приведены в таблице.

Делимое	**Делитель**	**Частное**	**Остаток**
106	39	2	28
39	28	1	11
28	11	2	6
11	6	1	5
6	5	1	1
5	1	5	0

Следовательно $\frac{106}{39}=(2;1,2,1,1,5)$.

Массив чисел $[\Gamma]$, $[\Gamma_1]$, $[\Gamma_2]$, ..., Γ_n я буду называть *спектром числа* Г. Составляющими спектра являются знаменатели правильной непрерывной дроби для Г. Поразительная геометрическая интерпретация алгоритма и спектра, который он порождает, представлена на рис. 8. Начнем с построения прямоугольника с основанием 1 и высотой Г; от этого прямоугольника мы *отрежем* столько квадратов, сколько возможно, оставляя прямоугольник, к которому затем применим ту же самую операцию. Процесс завершается, когда в конце *не остается прямоугольника* (т.е. предыдущий прямоугольник удается поделить на целое число квадратов). *Количество квадратов, содержащихся в каждом последующем прямоугольнике, дает соответствующую составляющую спектра* Г.



Спектр числа $\frac{106}{39} = (2;1,2,1,1,5)$

Спектр числа $\sqrt{3} = (1;1,2,1,2,..)$

Спектр «золотого сечения» $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = (1;1,1,1,...)$

Рис. 8. Спектры чисел

То, что этот алгоритм можно применить к любому рациональному числу и полученный спектр будет *конечным* и *однозначно определяемым*, следует из самого построения этого процесса. И наоборот, для любого конечного набора положительных целых чисел существует только одно рациональное число Г, для которого этот набор является его спектром. Прямой, но труднодоступный способ вычисления Г по его спектру заключается в продвижении «снизу вверх». Однако можно сберечь много труда, если использовать другой алгоритм, открытие которого обычно приписывают Джону Валлису, учителю Ньютона. Чтобы показать, как процедура работает на практике, я помещу в таблицу результаты примера, рассмотренного выше, Г = (2; 1, 2, 1, 1, 5), первые две *подходящие дроби* для которого очевидно 2 и 3.

Число из спектра: g	2	1	2	1	1	5
Числитель: N	2	3	$2 \cdot 3 + 2 = 8$	$1 \cdot 3 + 3 = 11$	19	106
Знаменатель: D	1	1	$2 \cdot 1 + 1 = 8$	$1 \cdot 3 + 1 = 4$	7	39
Определитель Гюйгенса: H		−1	+1	−1	+1	−1

Пусть N_{k-2}, N_{k-1} и N_k это числители, а D_{k-2}, D_{k-1} и D_k знаменатели трех последовательных подходящих дробей и пусть g_k — член непрерывной дроби, который соответствует k-й подходящей дроби. Тогда алгоритм Валлиса можно выразить в виде *рекуррентных соотношений*:

$$N_k = g_k N_{k-1} + N_{k-2} \qquad D_k = g_k D_{k-1} + D_{k-2}. \tag{62}$$

Из этих формул Гюйгенс вывел теорему, которая позднее стараниями Эйлера и Лагранжа стала краеугольным камнем теории *бесконечных непрерывных дробей*. Обозначим через H_k следующий определитель:

$$H_k = \begin{vmatrix} N_{k-1} & N_k \\ D_{k-1} & D_k \end{vmatrix} = (-1)^k. \tag{63}$$

Теорема Гюйгенса утверждает, что H_k *принимает попеременно значения* $+1$ *или* -1.

О неопределенных уравнениях

Многие математические задачи требуют целочисленных решений алгебраических уравнений с двумя или более неизвестными. Изучение пифагоровых троек и предположение Ферма о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решения в целых числах, если $n > 2$, принадлежат к классу задач, которые получили общее название — диофантовы уравнения.

Темой этого параграфа является самая элементарная диофантова проблема: найти все целые решения уравнения:

$$qx - py = r, \tag{64}$$

где целые числа p, q и r являются *попарно взаимно простыми.*

Для начала заметим, что если пара чисел $x = a$ и $y = b$ является решением уравнения (64), то

$$x = a + np \qquad y = b + nq$$

тоже будут решениями при *всех целых значениях n, положительных или отрицательных.* Далее заметим, что если X и Y являются решениями уравнения

$$qX - pY = 1, \tag{65}$$

т.е. $qX - pY = 1$, то числа $a = rX$ и $b = rY$ удовлетворяют уравнению (64). Наконец, уравнение

$$qx + py = r$$

можно привести к виду (64) простой подстановкой $x = x$, $y = -z$.

Разложим теперь число p/q в непрерывную дробь и обозначим как N/D *предпоследнюю подходящую дробь* спектра. Тогда, в силу теоремы Гюйгенса, величина $qN - pD$ равна или +1, или −1. В первом случае $X = N$, $Y = D$ является решением уравнения (65), а во втором случае решением является $X = -N$, $Y = -D$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (64) можно представить в виде

$$\left[\begin{array}{ll} x = np + rN & y = nq + rD \\ x = np + rN & y = nq - rD \end{array}\right. \tag{66}$$

в зависимости от того, содержит ли спектр p/q *нечетное* или *четное* количество членов. *Пример:* Рассмотрим уравнение $39x - 106y = 5$. Предпоследняя подходящая дробь числа 106/39 равна 19/7 и

$$\begin{vmatrix} 19 & 106 \\ 7 & 39 \end{vmatrix} = -1.$$

Поэтому общее решение можно представить в виде $x = 106n - 95$, $y = 39n - 35$. Для $n = 1$ можно получить частное решение (11, 4); следовательно, мы также можем записать

$$x = 106m + 11,\ y = 39m + 4,$$

где m принимает любые целые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Проблема деления круга

Задача построения правильного n-угольника эквивалентна разделению окружности на n равных частей или построению угла $\omega = 2p/n$. Существует целый класс задач, связанных с делением круга. Сюда же относятся задачи, связанные с определением, *при каких целых n построение возможно исключительно с помощью циркуля и линейки*. Так как разделение дуги окружности пополам легко выполняется при помощи циркуля и линейки, то интерес представляют только нечетные значения n.

Греки знали решение только для трех таких целых чисел: 3, 5 и 15. Задача о построении правильного *семиугольника*, т.е. о разделении окружности на 7 равных частей, была одной из самых знаменитых задач античности. Она не была решена вплоть до восемнадцатого века, когда было установлено, что случаи $n = 7$ и $n = 13$ сводятся к *неприводимым кубическим уравнениям.*

Так обстояли дела к 1801 году, когда проблема была переформулирована и полностью решена Гауссом. В его теореме утверждается, что если возможно разделить окружность на n равных частей с помощью циркуля и линейки, тогда n либо *простое число Ферма*, либо *свободное от квадратов произведение таких простых чисел.* Вспомним, что простое число Ферма имеет вид $2^{2^p} + 1$. В силу теоремы Гаусса существует только 8 таких «круговых» нечетных целых чисел, меньших 300:

$$3,\ 5,\ 15,\ 17,\ 51,\ 85,\ 255,\ 257. \tag{67}$$

Первая часть теоремы Гаусса относится к анализу уравнения $z^n - 1 = 0$ и выходит за рамки этой книги. Вторая часть эквивалентна утверждению, что, если возможно разделить окружность на p частей, а также на q частей, *тогда ее возможно разделить на* pq *частей* при условии, что p и q *взаимно простые.* Пусть

$$\frac{2\pi}{p} = \alpha\frac{2\pi}{q} = \beta\frac{2\pi}{pq} = \gamma. \tag{68}$$

Мы предполагаем, что нам известен способ построить дуги α и β; к тому же мы могли бы построить дуги $x\alpha$ и $y\beta$, где x и y любые целые числа; и следовательно построить дугу $x\alpha - y\beta$, поскольку такие операции могут быть выполнены с помощью только циркуля. Значит задача сводится к тому, чтобы найти такие целые числа x и y, которые удовлетворяют соотношению

$$\gamma = x\alpha - y\beta.$$

В силу условия (68) это последнее соотношение эквивалентно *неопределенному уравнению*

$$xq - yp = 1,$$

которое, как мы видели в предыдущем параграфе, всегда имеет решение, *когда числа p и q взаимно простые.*

В качестве примера возьмем $p = 51$ и $q = 40$. По алгоритму Евклида мы находим, что $51/40 = (1;\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3)$, а предпоследняя подходящая дробь равна $14/11$. Значит

$$11\left(\frac{2\pi}{40}\right) - 14\left(\frac{2\pi}{51}\right) = \frac{2\pi}{40\cdot 51}.$$

Бесконечные спектры

Ни в определении, ни в реализации алгоритма Евклида нет ничего, что ограничивало бы его рациональными числами, за исключением того, что применяемый к иррациональным величинам процесс всегда *бесконечен*. Алгоритм Валлиса также не ограничен конечными спектрами. Действительно, в силу теоремы Гюйгенса *алгоритм сходится для любого бесконечного спектра* или, более точно, *подходящие дроби для любой правильной бесконечной непрерывной дроби сходятся в пределе к некоторому однозначно определенному иррациональному числу*. Вопрос о том, всегда ли применение алгоритма Евклида к иррациональному числу воссоздает исходный спектр, связан с некоторыми тонкостями, обсуждать которые здесь нет возможности. Однако ответ является утвердительным.

Таким образом, оба этих алгоритма в сочетании представляют собой достаточно мощный инструмент для получения *рациональных аппроксимаций иррациональных значений*. Практический аспект этой задачи включает в себя почленное разложение числа в правильную непрерывную дробь, и, в худшем случае, это может быть трудоемкой процедурой. Но если обнаружить в бесконечном спектре некоторую математическую закономерность или закон следования, это уже совсем другое дело. Хотя, не считая квадратичных выражений, обычно спектр иррациональных величин, как алгебраических, так и трансцендентных, выглядит настолько же бесформенным и невразумительным, короче говоря, *случайным*, как и десятичная запись числа π.

По контрасту, спектры иррациональных чисел вида $A+\sqrt{B}$ могут быть какими угодно, только не случайными, это особенно справедливо в отношении квадратных корней из целых чисел. *Периоды*, образцы *циклов*, теоретические свойства подходящих дробей, глубинная связь между этими подходящими дробями и некоторыми классическими диофантовыми уравнениями волновали многих математиков восемнадцатого и девятнадцатого столетий, от Эйлера до Сильвестра; интерес не утрачен и в наши дни. Недостаток места не позволяет мне исчерпывающе представить здесь историю развития этого вопроса; примеры, приведенные ниже, выбраны в надежде поощрить читателя к более глубокому изучению предмета.

Иррациональные числа и циклы

Давайте проанализируем применение алгоритма Евклида к типичному радикалу, такому как $\sqrt{23}$. Пусть $N = 23 = 4^2 + 7$, таким образом, первый член в спектре $\sqrt{23}$ равен 4; *первый остаток* равен $\sqrt{23}-4$; обратная ему величина $(\sqrt{23}+4)/7$ — это второе *полное частное*; и самое большое целое число, содержащееся в этом полном частном, является вторым членом спектра. Продолжая эту процедуру, мы в конце концов получим остаток, равный первому, и с этого момента члены спектра начнут повторяться. В результате мы получим

$$\sqrt{23}=(4;\quad 1,3,1,8,\quad 1,3,1,8,\quad 1,3,1,8,\quad ...).$$

Для удобства это записывают короче: $\sqrt{23} = (4; \underline{1, 3, 1, 8})$. Последовательность 1, 3, 1, 8 называется циклом спектра, количество членов в цикле называется *периодом*. Подробности алгоритма представлены в табл. 1. В табл. 2 перечислены циклы корней от от $\sqrt{2}$ до $\sqrt{24}$.

Перейдем к общему случаю. Пусть N это любое целое число, не являющееся полным квадратом. Тогда мы можем записать $N = b^2 + h$, где h может принимать значения от 1 до $2b$. Пусть

Таблица 1. Типичное разложение

Полное частное	$\sqrt{23}$	$\frac{\sqrt{23}+4}{7}$	$\frac{\sqrt{23}+3}{2}$	$\frac{\sqrt{23}+3}{7}$	$\sqrt{23}+4$	$\frac{\sqrt{23}+4}{7}$
Член спектра	**4**	**1**	**3**	**1**	**8**	**1**
Остаток	$\sqrt{23}-4$	$\frac{\sqrt{23}-3}{7}$	$\frac{\sqrt{23}-3}{2}$	$\frac{\sqrt{23}-4}{7}$	$\sqrt{23}-4$	$\frac{\sqrt{23}-3}{7}$

Таблица 2. Циклы радикалов

$\sqrt{2}$	1	1	2	$\sqrt{14}$	3	1 2 1	6
$\sqrt{3}$	1		2	$\sqrt{15}$	3	1	6
$\sqrt{5}$	2		4	$\sqrt{17}$	4		8
$\sqrt{6}$	2	2	4	$\sqrt{18}$	4	4	8
$\sqrt{7}$	2	1 1 1	4	$\sqrt{19}$	4	2 1 3 1 2	8
$\sqrt{8}$	2	2	4	$\sqrt{20}$	4	2	8
$\sqrt{10}$	3		6	$\sqrt{21}$	4	1 1 2 1 1	8
$\sqrt{11}$	3	3	6	$\sqrt{22}$	4	1 2 4 2 1	8
$\sqrt{12}$	3	2	6	$\sqrt{23}$	4	1 3 1	8
$\sqrt{13}$	3	1 1 1 1	6	$\sqrt{24}$	4	1	8

также $[2b/h] = c$. Используя эти обозначения, перечислим общие свойства разложения:

1) спектр числа $\sqrt{b^2 + h}$ начинается с b и c;
2) c является ***первым членом цикла***, а также ***предпоследним членом***; ***последним членом*** цикла является $2b$;
3) члены цикла, предшествующие $2b$, образуют ***симметричный блок***. Если период p является ***четным***, как в случае $\sqrt{14}$ или $\sqrt{23}$, тогда симметрия является ***нечетной*** и в этом блоке есть ***центральный член***. Если период является ***нечетным***, как в случае $\sqrt{13}$, то симметрия является ***четной*** и есть ***два центральных члена***.

Таким образом, чтобы периодический спектр представлял квадратный корень из целого числа, он должен иметь вид:

$$\Gamma = (b; \overline{c, d, \ldots d, c, 2b}).$$

Однако мы сейчас увидим, что, хотя такая ***симметрия необходима, она не является достаточной***.

Особый интерес представляют циклические непрерывные дроби ***с периодом 2***. Если такая дробь представляет квадратный корень из целого числа, она должна иметь вид:

$$x = (b; \overline{c, 2b}), \text{ т.е. } x - b = \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{x + b}}.$$

Последнее соотношение приводит к квадратному уравнению

$$x^2 = b^2 + 2b/c.$$

Отсюда следует, что для того чтобы выражение $(b; \overline{c, 2b})$ представляло квадратный корень из целого числа, $2b$ ***должно делиться на*** c. Это определенно произойдет, когда $c = 1$, или 2, или b, или $2b$; что приводит к следующим случаям

$$\sqrt{b^2 + 2b} = (b; \overline{1, 2b}) \qquad \sqrt{b^2 + b} = (b; \overline{2, 2b})$$

$$\sqrt{b^2 + 2} = (b; \overline{b, 2b}) \qquad \sqrt{b^2 + 1} = (b; \overline{2b}).$$

В последнем случае период равен 1. Если b простое число, то четыре приведенных спектра с периодами 1 или 2 являются единственно возможными. Если же число b является составным, например $b = 30$, то вариантов значительно больше. В этом случае $2b = 60$ и c может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Отсюда вытекает, что между $\sqrt{901}$ до $\sqrt{961}$ имеется всего 12 радикалов, для которых период меньше трех.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

О ПРИНЦИПАХ И АРГУМЕНТАХ

> Математики изучают не предметы, а лишь отношения между ними; поэтому для них безразлично, будут ли одни предметы заменены другими, лишь бы только не менялись их отношения. Для них не важно материальное содержание; их интересует только форма.
>
> *Пуанкаре*

Принцип распределения Дирихле

Если в комоде пять отделений и в нем лежит больше, чем пять рубашек, то в одном из отделений лежит больше одной рубашки. Если семья состоит более чем из семи человек, то по крайней мере два человека родились в один и тот же день недели. Если деревьев в лесу больше, чем листьев на любом из деревьев, то есть по крайней мере два дерева с одинаковым количеством листьев. Это примеры рассуждений, которые получили известность как *принцип ящиков Дирихле*. В общем виде этот принцип можно сформулировать следующим образом: *если разложить p объектов по q отделениям и $p > q$, то по крайней мере в одном из отделений лежит больше одного предмета.*

Я не буду приводить здесь доказательство этого утверждения из-за боязни, что читатель может обвинить меня в «подчеркивании очевидного». Такой по крайней мере была реакция моего друга непрофессионала, когда он услышал рассуждение в первый раз. «Очевидно даже самому посредственному уму, – сказал он, – что если гостей за столом больше, чем булочек, то некоторые булочки придется разделить или некоторые гости останутся без булочек. Зачем называть этот трюизм принципом и называть его в честь математика, к тому же математика девятнадцатого века? Как идея, такая фундаментальная и простая, может считаться современным открытием, если она должна была подразумеваться в математических рассуждениях с самого начала?»

Эти комментарии вполне оправданны. В равной степени они применимы и к другим находкам, которые точно так же неявно использовались математиками и непрофессионалами задолго до того, как были сформулированы в виде принципов. Вот еще несколько примеров таких непроявившихся, *скрытых идей*: принцип *полной индукции* Паскаля, метод *бесконечного спуска* Ферма, *счение Дедекинда*. Однако почему мы на этом останавливаемся? Дедуктивные выводы были основой теологических рассуждений в течение многих веков, прежде чем Фалес сделал их обязательным условием математических рассуждений; хотя *принцип положения* органически вошел в человеческую речь с тех пор, как человек почувствовал необходимость выразить словами числа, превосходящие количество его пальцев.

Однако одно дело — использовать интеллектуальные находки в повседневной жизни, и совсем другое — выразить идею явным образом, и затем осознанно применить при исследовании в новых областях познания. Помните разбогатевшего выскочку из пьесы Мольера, который к своему ужасу вдруг понял, что всю свою жизнь говорил *прозой*? Что же, мы все используем прозу, и большинство из нас злоупотребляет ею; и все же проза остается самым эффективным средством, позволяющим выразить свои мысли и передать их последующим поколениям.

Принцип распределения неявно использовался в этой книге в нескольких случаях: при определении периода десятичного представления рациональной дроби; в доказательстве Гаусса теоремы Вильсона; при разложении квадратного корня в правильную непрерывную дробь — и еще много раз. Я рассмотрю еще раз первый пример, поскольку это типичный случай, когда принцип работает как инструмент доказательства.

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь, представляющую число $1/q$, где q — любое целое число, не кратное ни 2, ни 5. Эта дробь будет *циклической*, и период p, т.е. количество цифр в цикле, является функцией числа q, хотя природа этой функции не определена точно и в наши дни. Однако мы знаем, что $p \leq q - 1$. В самом деле, p равно длине периода остатков (см. Приложение А), которые могут принимать значения в диапазоне от 0 до $q - 1$. Если бы период p превышал $q - 1$, то, согласно принципу Дирихле, один и тот же остаток встречался бы в одном цикле более одного раза, что противоречит тому факту, что в одном цикле не может быть двух равных остатков.

О терминах «возможно» и «невозможно» в геометрии

Сложности, свойственные проблемам, которые завещали нам древние, таким как удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга и другие, определяются не сущностью самих проблем. Сложности скорее отражают радикальный характер *классического запрещения*, которое ограничивало геометрические построения манипуляциями с линейкой и циркулем.

Термины «возможно» и «невозможно» применительно к геометрии не имеют абсолютного значения; в каждом конкретном случае мы должны оговаривать, какими инструментами построение должно быть выполнено. Действительно, если бы все ограничения были сняты, если бы любые инструменты, поддающиеся геометрическому определению, допускались наравне с традиционными, если бы геометрические места точек, построенные механически или с помощью некоторой графической процедуры, признавались бы наравне с прямой и окружностью – слова «возможно» и «невозможно» утратили бы всякий смысл, так как, очевидно, что область *возможных* задач совпала бы с областью *всех* задач.

При классической трактовке построения инструменты скромно оставались на заднем плане, но современный подход решительно выдвигает их вперед. Каждый инструмент рассматривается как «представитель» целой группы задач, о которых можно сказать, что они составляют его область. Таким образом, у нас есть *линейная* область, состоящая из задач, которые можно решить при помощи одной только линейки; *круговая* область или область циркуля; и классическая или традиционная область, которая включает в себя и линейную, и круговую. (Доказана теорема Мора–Маскерони, заключающаяся в том, что все построения, которые можно выполнить при помощи циркуля и линейки, можно выполнить при помощи одного циркуля. – *Прим. пер.*) За пределами традиционной области лежит обширная территория задач, для которых классических инструментов недостаточно.

О диагональных процессах

Мы хотим доказать, что *множество действительных чисел не является счетным.* С этой целью мы предположим, что любое действительное число в интервале $0 < x < 1$ выражено в виде десятичной дроби. Строгое соблюдение этого принципа приведет к некоторой неопределенности, поскольку такие дроби, как

0,5 и 0,4999..., соответствуют одному и тому же рациональному числу. Чтобы избежать таких сложностей, давайте договоримся заменять каждую конечную десятичную дробь на ее бесконечный аналог, как в приведенном выше примере.

Давайте теперь предположим, что удалось перенумеровать множество действительных чисел. Тогда их можно было бы упорядочить в последовательность следующего вида:

$$\begin{array}{c} x_1 = 0,a_1a_2a_3 \ldots \\ x_2 = 0,b_1b_2b_3 \ldots \\ x_3 = 0,c_1c_2c_3 \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

Мы собираемся показать, что вне зависимости от того, как этот массив построен, всегда существует такое действительное число x', которое не входит в этот массив. x' определяется с помощью алгоритма, который получил название *диагонального процесса.*

$$x' = 0,a_1'b_2'c_3' \ldots,$$

где a_1' — цифра, которая не равна ни нулю, ни a_1; аналогично b_2' — цифра, которая не равна ни нулю, ни b_2; и т.д.

Таким образом, мы определили число x' как десятичную дробь с бесконечным количеством значащих цифр, однако это действительное число отличается от каждого из чисел последовательности, приведенной выше, поскольку две десятичные дроби с бесконечным количеством значащих цифр равны тогда и только тогда, когда все их цифры идентичны. Но число x' отличается от x_1 первой цифрой; от x_2 — второй цифрой и в общем от x_n — n-ой цифрой. Мы доказали, таким образом, существование действительного числа x, не включенного в последовательность, приведенную выше, что противоречит предположению о том, что множество действительных чисел можно перенумеровать.

Об ограниченной геометрии

Эмпирическая геометрия по своей природе является ограниченной, и установить общие законы для такой геометрии было бы чрезвычайно сложно. Представьте, например, что поверхность вашего стола — это единственная область для геометрических размышлений. Вам придется научиться различать множество разновидностей прямых линий: те, которые выходят из углов вашего стола; другие, которые пересекают обе диагонали; третьи, которые образуют с краями стола прямой угол, и т.д. Поставьте произвольным образом четыре точки и задайте себе вопрос: пересечется ли прямая, проходящая через первые две точки, с прямой, проходящей через две оставшиеся? Прежде всего, вам придется установить, к каким из нескольких видов относятся одна и вторая прямые. Если далее вы попытаетесь проанализировать все возможные случаи, чтобы сформулировать критерий пересечения двух прямых, вы получите такую формулировку закона, что по сравнению с ним, правила формирования прошедшего времени неправильных глаголов в английском языке покажутся вам детской игрой.

В *ограниченной геометрии* такие задачи, как построение окружности с заданным центром и заданным радиусом или окружности, описанной вокруг треугольника, или построение перпендикуляра к прямой линии, проходящего через заданную точку, в общем случае не имели бы решения. Две прямые в общем случае не обязательно образуют угол, а три прямые – треугольник. Задача о построении треугольника, подобного данному, является бессмысленной, если коэффициент подобия превосходит определенное число. Кратчайшим расстоянием от точки до прямой не всегда будет перпендикуляр и т.д.

Однако если бы вы и достигли мастерства в этой хитроумной геометрии, это было бы только начало ваших трудностей. Если бы границы геометрической области изменились и вместо прямоугольной поверхности вашего стола приняли бы какую-либо другую форму, например, треугольника, окружности или эллипса, вам пришлось бы все начинать заново. Действительно, характерной особенностью ограниченной геометрии является принципиальная зависимость ее законов от вида границы, внутри которой она применятся. Здесь мы можем вновь прибегнуть к аналогии с языком – правила ограниченной геометрии напоминают грамматику отдельного языка; каждая граница требует отличающегося от других набора правил. И хотя некоторые правила были бы общими для всех границ, выделенные исключения для двух различных границ были бы различными, так же как английские и французские неправильные глаголы. И если все это относится к эмпирической геометрии, ограниченной плоскостью, то какие же трудности возникнут в связи с пространственной конфигурацией?

Следовательно, вполне очевидно, что если бы мы ограничились конечными границами, то методы дедукции были бы малопригодны: геометрия осталась бы описательной наукой и общности в ней было бы не больше, чем в зоологии, ботанике или минералогии.

О принципе транзитивности

Если некоторое отношение таково, что из его выполнения между *A* и *B* и между *B* и *C* следует, что оно выполняется между *A* и *C*, то мы говорим, что оно *транзитивно.* Например, кровное родство — *транзитивное* отношение, а отцовство — *интранзитивное.* Примерами транзитивных отношений в математике являются *равенство*, *конгруэнтность*, *параллельность*; примерами интранзитивных отношений могут служить отношение перекрытия, а также отношение внутри-снаружи. То есть фигура *A* может быть вписана в фигуру *B*, а фигура *B* — вписана в фигуру *C*, при том что *A* не вписана в *C*.

Принцип транзитивности заключается в утверждении, что *если две сущности некоторым образом эквивалентны третьей, то они также эквивалентны между собой.* Этот принцип имеет важное практическое значение во многих вопросах. Так, в геометрии мы называем два отрезка *конгруэнтными*, если их можно так переместить, чтобы один отрезок совпал с другим. Если подойти к этому серьезно, нам пришлось бы вырезать тот участок плоскости, который содержит один из двух отрезков, и поместить его на другой участок плоскости. На практике мы, конечно, не делаем ничего подобного — на практике мы применяем циркуль или линейку с делениями и полагаем в каждом случае, что *если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны между собой.* В чистой математике принцип транзитивности используется всякий раз, когда мы преобразуем равенство из одного вида в другой. Короче говоря, *наиболее фундаментальное свойство математического равенства — это его транзитивность.* А как насчет *физического равенства*?

Чтобы выявить суть вопроса как можно более конкретно, я попрошу читателя представить, что перед ним несколько стальных стержней, абсолютно одинаковых по всем параметрам за исключением длины. Для конкретности, давайте предположим, что их длины тщательно измерены в лаборатории, и оказалось, что они находятся в диапазоне от 30 до 50 миллиметров; в частности, три из них, помеченные как *A*, *B* и *C*, имеют длины 30, 31 и 32 мм соответственно. Однако ничего этого вы не знаете и не хотите знать, поскольку эта информация может оказать влияние на ваше решение; ваша цель заключается в том, чтобы установить, какой метод измерений вы смогли бы реализовать, основываясь только на своих чувствах, без помощи инструментов и датчиков.

Вы начинаете со стержней *A* и *B*: располагаете их рядом и убеждаетесь, что ни на глаз, ни кончиками пальцев вам не удается обнаружить никакой разницы между длинами этих стержней, поэтому вы объявляете их *идентичными*. Вы повторяете ту же самую процедуру сравнения со стержнями *B* и *C* и решаете, что эти стержни также одинаковы по длине. Далее вы сопоставляете стержни *A* и *C*; но теперь и глаза, и кончики пальцев безошибочно обнаруживают, что *C* длиннее, чем *A*. И вы приходите к поразительному выводу: ***две вещи могут быть равны третьей, но при этом не быть равными между собой.***

Но этот вывод вступает в прямое противоречие с одной из важнейших аксиом математики, которая гласит, что если две величины равны третьей, то они обязательно равны между собой. Эта аксиома лежит в основе большинства арифметических операций; без нее нельзя было бы ни преобразовывать тождества, ни решать уравнения. Я не буду заходить слишком далеко и утверждать, что нельзя построить математику, отвергающую эту аксиому. Но важно то, что физики используют не такие *модернистские* дисциплины, а *классическую математику*, для которой эта аксиома является краеугольным камнем.

Что дает физикам право так поступать? Может ли применение научных измерительных приборов вместо непосредственных ощущений устранить возникшее противоречие? Нет. *Отображение показаний на градуированной шкале* — конечная цель любого измерительного прибора; следовательно, каким бы талантливым ни был разработчик этого устройства, в конечном счете, ему приходится полагаться на чувство другого наблюдателя, а конкретно на его зрение. С другой стороны, если мы проанализируем более детально операцию считывания показаний со шкалы, то обнаружим, что она ни в чем *принципиально* не отличается от рассмотренного выше гипотетического примера со стержнями. Конечно, критический интервал, который в случае со стержнями равнялся одному миллиметру, теперь может быть сокращен до одного микрона; с помощью более чувствительных измерительных приборов и более точных методов можно добиться уменьшения интервала даже до малой доли микрона. Однако достаточно очевидно, что как бы далеко ни зашел этот процесс уточнения, он не сможет ни устранить возникшую трудность, ни даже уменьшить ее, поскольку в конце концов останутся данные, о которых кто-то сможет сказать: «Я установил, что величина *A* идентична величине *B*; я также установил, что величина *C* идентична величине *B*;

и при этом я совершенно определенно обнаружил, что *С* больше, чем *А*». (С появлением цифровых приборов градуированная шкала стала анахронизмом. Исследователь *видит* на дисплее конкретные цифры. Но при обработке данных он должен учесть шум самого измерительного устройства, внесенную ошибку дискретизации и т.п. Так что в конце концов все равно останутся данные, о которых кто-то сможет сказать... — *Прим. пер.*)

Измеримость и соизмеримость

Вполне очевидно, что во времена античности было известно о существовании рациональных треугольников, определяемых такими тройками, как (3, 4, 5); (5, 12, 13); (7, 24, 25); нет сомнений, что именно поиски дополнительных троек привели древнегреческих математиков к открытию теоремы Пифагора.

Эта теорема стала триумфальным подтверждением философии числа. Однако триумф длился недолго: именно общность теоремы выявила факт существования *иррациональных чисел*. Одним из последствий этого волнующего открытия стал пересмотр всей системы взглядов на сущность геометрии. Для ранних пифагорейцев *каждый треугольник был рациональным треугольником,* поскольку, как они полагали, *все, что измеримо — соизмеримо.* Последняя сентенция казалась им столь же бесспорной, как любая аксиома. И когда они провозглашали, что *число управляет вселенной*, они имели в виду *целое* число, поскольку сама концепция того, что могли бы существовать величины, не поддающиеся выражению через целые числа, была чужда их мировоззрению, так же как и их опыту.

Некоторые современные интерпретаторы математического мышления склоняются к тому, чтобы отбросить идеи ранних пифагорейцев как наивные представления былых времен. Однако с точки зрения того, кто использует математический аппарат в своей повседневной работе — а их сегодня огромное количество, но *для кого математика всего лишь* средство, а не цель и никогда не является целью сама по себе, с его точки зрения эти понятия не устаревшие и не наивные. Потому что те числа, которые имеют для него практическое значение, получаются как результат или *подсчета* или *измерения* и, следовательно, являются или *целыми*, или *рациональными дробями*. Конечно, он может научиться использовать с относительной легкостью символы и термины, которые указывают на существование не-рациональных сущностей, но эта фразеология для него не более чем полезные обороты речи. В конце возникает рациональное число как единственная величина, которая может приносить практическую пользу.

Но если человек, уязвленный упреком в наивности, попытается проникнуть в тайну терминологии, он скоро обнаружит, что процессы, призванные оправдать существование этих не-рациональных сущностей, абсолютны неосуществимы и, следовательно, незаконны. Если же он будет упорствовать и попытается интерпретировать эти сущности через свои собственные рациональные термины, то ему строго напомнят, что в делах, касающихся иррациональных величин, *можно временами ускользнуть от бесконечности, но освободиться от нее нельзя.* Потому что самой природе этих таинственных величин присуще следующее свойство: как бы ни было близко по значению данное рациональное число к иррациональному, всегда существуют другие рациональные числа, которые будут к нему еще ближе.

Поэтому практик чувствовал бы себя более уверенно среди ранних пифагорейцев, чем среди их более строгих последователей, и он с полной готовностью воспринял бы их убеждение, что все измеримые величины являются соизмеримыми. Действительно, ему было бы трудно понять, почему принцип, такой красивый в своей простоте, так безрассудно отвергнут. И в конце концов, *математикам пришлось бы признать, что от принципа отказались не потому, что он противоречил опыту, а потому что он оказался несовместим с аксиомами геометрии.*

Поскольку если аксиомы геометрии верны, то теорема Пифагора выполняется безо всяких исключений. И если теоремы выполняются, то квадрат, построенный на диагонали квадрата со стороной 1, имеет площадь, равную 2. Но с другой стороны, в соответствии с утверждением пифагорейцев, тогда число 2 было бы квадратом некоторого рационального числа, что вступает в вопиющее противоречие с аксиомами арифметики. (Конечно, «практик» может и не знать, откуда взялись те формулы, которыми он пользуется. Но в современной жизни трудно найти такую *практическую* область, в которой не использовались бы *результаты*, полученные с применением математического аппарата, выстроенного на основе анализа бесконечно малых и теории функций комплексного переменного. *Опыт* показывает, что спутники все же иногда выводятся на орбиту, электрический ток течет по проводам, а в пробуренных скважинах обнаруживается нефть, — и все это на основании расчетов, выполненных с применением аппарата, выстроенного на зыбкой почве рассуждений о бесконечном. И хотя этот аппарат не более чем очередная итерация, все же эта итерация позволила продвинуться дальше по пути познания, чем рациональная математика. — *Прим. пер.*)

Время и континуум

Ваше сознание существует *сейчас*; ваш разум воскрешает другие *сейчас*, все менее отчетливые по мере того, как они отодвигаются в *прошлое*, пока совсем не затеряются в туманной дымке памяти. Эта временная последовательность, смутная и перекрывающаяся, связана с личностью, которую вы называете словом *Я*. За несколько лет каждая клетка тела этой личности изменяется; ваши мысли, суждения, эмоции и устремления подвергаются аналогичным метаморфозам. Что же неизменное вы обозначаете как *Я*? Конечно, не просто имя отличает личность от других, ей подобных. Может быть тогда, это временная последовательность, нанизанная, как бусины, на нить памяти?

Дискретная последовательность разрозненных воспоминаний, которая начинается когда-то в детстве и резко обрывается в *настоящем — таково время* непосредственно на уровне сознания. Однако когда это сырье подвергается таинственному процессу очистки, который называют физической интуицией, появляется что-то совершенно иное. *Интуитивное время — это экстраполированное время*, экстраполированное далеко за пределы зарождения сознания, в бесконечные глубины *прошлого* и за пределы настоящего — в бесконечное *будущее*. Причем это будущее, как и прошлое, представляется составленным из множества *сейчас*. Действием разума мы разделяем время на два класса, прошлое и будущее, которые взаимно не пересекаются и вместе составляют *все* время, *вечность*. *Сейчас* для нашего разума это всего лишь сечение, которое отделяет прошлое от будущего; и, поскольку любой момент прошлого уже был когда-то *сейчас*, и любой момент будущего вскоре станет *сейчас* мы воспринимаем любой момент прошлого или будущего как такое сечение.

Это все? Нет, интуитивное время — это *интерполированное* время: между любыми двумя моментами прошлого, как бы тесно они ни были связаны в нашей памяти, мы вставляем — снова действием разума — бесконечное количество других моментов. Мы называем это *непрерывностью* прошлого; и точно такой же непрерывностью мы наделяем будущее. *Время для нашего разума — это поток*; и хотя наш опыт знает, что этот поток состоит из разрозненных фрагментов, однако наша интуиция заполняет пробелы, оставленные опытом, превращая время в *континуум*, прототип всех континуумов в природе.

Что такое идеальная бесконечность, которую мы приписываем геометрической линии? Разве это не воплощение нашей убежденности, что мы можем нарисовать такую линию непрерывным движением руки? Мы переносим свойства потока времени на все физические явления; анализируя любое явление, будь это свет или звук, тепло или электричество, прежде всего, мы пытаемся выразить его через расстояние, массу или энергию, так чтобы свести к *функции времени*.

Конфликт между дискретным и непрерывным — это не просто продукт школы диалектики; его истоки можно проследить до самого момента зарождения мысли, поскольку он всего лишь отражение всегда существовавшего противоречия между концепцией времени как потока и дискретностью нашего восприятия. В конечном счете, наша концепция числа основана на *счете*, т.е. на перечислении дискретного, разрывного, прерывистого, в то время как наше интуитивное представление времени придает всем явлениям характер непрерывного потока. Свести физическое явление к числу, не разрушая непрерывный характер явления, — в этом исполинская задача математической физики; и в более широком смысле геометрия также является всего лишь одним из направлений физики.

Математика и реальность

Классическая наука отводила человеку выделенное положение в схеме мироздания: он мог освободиться от уз, связывающих его со всеобщим механизмом, и рассматривать этот механизм в правильной перспективе. Конечно, его разум рассматривался как одно из звеньев этой бесконечной цепи причин и следствий, хотя считалось, что эволюция разума идет в направлении большей *свободы*. Его тело было сковано, но разум мог свободно созерцать эти цепи, систематизировать, измерять и взвешивать. Книга природы лежала открытой перед его взором; ему оставалось только разгадать шифр, которым она была написана, и эта задача была ему по силам.

Этот шифр был рациональным: неизменный порядок, который созерцал человек, подчинялся рациональным законам; вселенная была построена по чертежам, которые мог бы разработать человеческий разум, если бы на него была возложена такая задача; структура вселенной приводилась к рациональным дисциплинам; шифр ее законов можно было вывести из конечного набора предпосылок посредством силлогизмов формальной логики. Обоснованность этих предпосылок устанавливалась не рассуждениями, а опытом; только на основании опыта можно было принять решение о достоинствах теории. Подобно Антею, который во время изнурительной борьбы с Гераклом всякий раз восстанавливал свои убывающие силы, прикоснувшись телом к матери Земле, так и рассуждения развивались, соприкасаясь с твердой реальностью опыта.

Математический метод отражал вселенную. Его мощь создала неисчерпаемое разнообразие рациональных форм. Среди них была такая космическая модель, которая однажды могла бы объять вселенную одним охватом. Последовательными приближениями наука в конце концов выстроила бы эту космическую модель, поскольку с каждым следующим шагом подходила к ней всё ближе и ближе. Сама структура математики гарантировала *асимптотическое* приближение, так как каждое последующее обобщение охватывало все большую часть вселенной, не оставляя при этом ни пяди ранее захваченных территорий.

Математика и эксперимент господствовали более непоколебимо, чем когда-либо и в новой физике; но всепроникающий скептицизм все же затронул обоснованность этих методов. И обнаружилось, что твердая вера человека в их абсолютную обоснованность имеет антропоморфное происхождение; обнаружилось, что оба эти метода покоятся на символах веры.

Математика рассыпалась бы как карточный домик, лишенная той определенности, что человек с уверенностью может действо*вать так, как* если бы он обладал неограниченной памятью и его ожидала нескончаемая жизнь. Именно это предположение служит обоснованием бесконечных процессов, господствующих в математическом анализе. Но и это еще не все: даже арифметика утратила бы свою общность, если бы эта гипотеза была опровергнута, поскольку наша концепция целых чисел неотделима от нее; то же самое относится к геометрии и механике. Эта катастрофа, в свою очередь, уничтожила бы всю систему взглядов физических наук.

Обоснованность нашего опыта зиждется на вере в то, что будущее подобно прошлому. Мы верим, что если в последовательности событий, которые кажутся нам схожими по своей природе, проявилась определенная тенденция, то эта тенденция будет неизменной; и чем более единообразно и постоянно она проявлялась в прошлом, тем больше мы уверены в ее неизменности в будущем. Однако обоснованность этих *умозаключений*, на которой основаны все эмпирические знания, сама покоится на столь непрочном фундаменте, как стремление человека к определенности и неизменности.

А эта бездонная пропасть между нашим неконтролируемым опытом и систематическим экспериментом! А наши приборы для обнаружения и измерения, которые мы научились рассматривать как усовершенствованное продолжение наших чувств, разве они не могут нас обманывать? Не могут быть повинны в необъективном подходе к тем самих проявлениям, которые мы стремимся определить? Не является ли наше научное знание грандиозной, даже если и несознательной попыткой подменить числом смутный и ускользающий мир, открытый нашим чувствам? Цвет, звук и тепло сведены к частотам колебаний, вкус и запах – к числовым индексам химических формул. Разве такая реальность наполняет наше сознание?

И этим современная наука отличается от ее классической предшественницы – теперь мы осознаем ее антропоморфное происхождение и природу человеческого знания. Будь то детерминизм или рациональность, эмпиризм или математический подход, понятно, что *человек – мера всех вещей и нет другой меры.*

Конец!

Послесловие

С момента выхода четвертого и последнего издания этой книги прошло полстолетия, и все это время математика развивалась с удивительной скоростью. Некоторые наиболее выдающиеся нерешенные задачи были или решены, или распространились на смежные области. Со времен наших предков, впервые открывших правила работы с числами, проблемы математики вышли на поверхность; некоторые были решены, другие – нет; но, как камни на ячменных полях в Древней Финикии, новые задачи появляются быстрее, чем старые удается решить. И, несмотря на новейшие достижения математического анализе и теории чисел, содержание этой книги остается таким же актуальным, как и в 1930 году, когда было опубликовано первое издание. Современного читателя эта книга привлечет ясностью изложения, современностью и тем, что она побуждает самому задуматься над некоторыми вопросами.

Прогресс в математике ускоряется. Со стороны может показаться, что всего лишь несколько знаменитых задач было решено за последние 50 лет. Но современная математика проникает намного глубже. Решения поверхностных задач сложным образом связаны с другими задачами, которые часто относятся к весьма отдаленным областям, а их причудливо переплетенные корни, пересекая границы, происходят из одного великого и постоянного общего источника.

Древние задачи об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга оставались загадкой на протяжении двух тысяч лет, ожидая, пока блестящие идеи современной алгебры позволят найти доказательства. В 1837 году Пьер Ванцель доказал, что невозможно удвоить куб или разделить произвольный угол на три части, таким образом решив две великие загадки древности. Но закончилась ли этим длинная история, начавшаяся с выдумки оракула в Делосе, который объявил, что опустошительная эпидемия чумы в Афинах закончится, когда алтарь Аполлона, выполненный в виде куба, будет удвоен? Конечно же, нет! Решение Ванцеля породило новые вопросы о простых, алгебраических критериях того, что рациональные полиномиальные уравнения допускают решение через геометрические построения. Эти вопросы, в свою очередь, привели к намного более глубокой проблеме: как преобразовать геометрию в теорию уравнений.

Данциг сосредоточился в своей книге на эволюции понятия числа, оставаясь в пределах возможного и не углубляясь в геометрические разделы математики, хотя он знал, что ответы на некоторые из наиболее элементарных вопросов теории чисел иногда лучше обсуждать через замысловатую геометрию. В этой книге упоминаются проблема Гольдбаха, гипотеза о парных простых числах, великая теорема Ферма – три из многих выдающихся утверждений, еще не доказанных к моменту последнего издания этой книги. Великую теорему Ферма доказал в 1994 году Эндрю Уайлс при помощи своего аспиранта Ричарда Тэйлора, используя при этом несколько *наиболее красивых* и *ярких* идей теории чисел, чтобы распознать взаимосвязи между внешне различными математическими объектами, пришедшими из совершенно разных областей математики. (Я не могу осмелиться хотя бы приблизительно пересказать здесь доказательство в силу его сложности, однако оно исчерпывающе изложено в нескольких книгах, которые приведены в списке рекомендованной литературы.) Однако две другие задачи остаются нерешенными.

Гипотеза о парных двойных числах, например, принадлежит к обширному множеству задач, возникших из простых феноменологических вопросов о том, как множество простых чисел распределено среди натуральных чисел. Удивительно, что самые тонкие вопросы теории чисел могут быть сформулированы крайне просто. Чтобы их понять, требуется очень мало или не требуется совсем специальных знаний, и они часто привлекают ничего не подозревающих поклонников, которые, если не будут осмотрительны, могут обнаружить, что проводят бесконечные часы, поглощенные математическими развлечениями. Сколько всего простых чисел вида $n^2 + 1$? Сколько существует простых чисел p, таких, что $2p + 1$ тоже простое число? Существуют ли нечетные совершенные числа? (Совершенные числа, такие как 6, равны сумме своих делителей.) Теперь мы знаем, что нет нечетных совершенных чисел, содержащих меньше 300 цифр. А существуют ли они? Мы знаем, что если такое число есть, то оно должно быть равно сумме квадратов и в то же время иметь, по меньшей мере, 47 простых делителей. Но существуют ли они вообще?

Было время, когда молодые наивные математики (как и я сам) волновались, а что же будет, когда все эти тонкие простые вопросы – те, которые просто сформулированы, – будут разрешены. Потом мы поняли, что волноваться не о чем. Не только всегда будет достаточно вопросов, чтобы привлекать дилетантов, но каждый ответ порождает совокупность новых вопросов. Именно так обстоит дело с великой теоремой Ферма, на которой построена существенная часть современной теории чисел; то же самое можно сказать о неподдающихся задачах древних греков, в значительной степени сформировавших современную алгебру. Мы постоянно оказываемся на этой относительно ранней стадии понимания чисел.

Может показаться, что слишком долго ждать пятьдесят лет решения выдающихся задач; но, учитывая, что некоторые задачи ожидали своего решения в течение тысячелетий, мы увидим, как много произошло за период, составляющий всего *лишь 2%* времени, прошедшего с тех пор как появились «Элементы» Евклида и началась современная математика. Для начала давайте посмотрим, как на математику повлияли компьютеры. После этого мы взглянем на продвижение в вопросах, связанных с проблемой Гольдбаха и гипотезой о парных простых числах.

Компьютеры

В 1954 году, когда было опубликовано четвертое издание этой книги, MANIAC I (Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer) был самым мощным компьютером, в нем было 18 000 вакуумных ламп. (Можно представить, как часто она выходила из строя в связи с неисправностью 1 из 18 000 ламп.) В 1951 году без использования компьютеров было открыто самое большое 44-значное простое число:

$$(2^{148} + 1)/17 = 20988936657440586486151264256610222593863921,$$

но всего лишь три года спустя при помощи MANIAC I было открыто самое большое простое число $2^{2\,281} - 1$, состоящее из 687 цифр. Сегодня известно, что $2^{24\,036\,583} - 1$ — это простое число. Оно состоит из 7235733 цифр.

В 1954 году роль графического интерфейса, аналогичного принтерам, все еще исполняли чертежные доски, хотя в IBM уже был изготовлен опытный образец, который передвигал перо вверх, вниз, вправо или влево в соответствии с координатами на входе. Данциг не упоминает о дзета-функции Римана, хотя нули этой интересной функции (т.е. решения уравнения $\xi(s) = 0$) имеют любопытную связь с распределением простых чисел. Множество теорем теории чисел автоматически следуют из доказательства гипотезы Римана о том, что все нули $\xi(s)$ являются комплексными числами вида $^1/_2 + ai$. Например, в 1962 году Ван Юань показал, что если гипотеза Римана верна, то существует бесконечно много таких чисел p, что и p, и $p + 2$ являются произведением не более чем трех простых чисел. Риман смог вычислить три первых нуля дзета-функции с удивительной точностью вручную. В 1954 году, когда Алан Тьюринг нашел без помощи компьютера 1 054 нуля дзета-функции, это казалось огромным числом нулей. А на сегодняшний день, благодаря современным компьютерам, мы знаем более чем 10^{22} нулей, и все они лежат на прямой, так что их действительная часть равна $^1/_2$. Но ни один самый быстрый компьютер не скажет вам, лежат ли *все* решения этого уравнения на вертикальной линии $^1/_2 + ai$ в комплексной плоскости. Но самый простой настольный компьютер за 500$ может мгновенно найти многое из того что есть, но никогда не найдет ничего из того, чего нет.

Но компьютеры работают с конечными числами, и, хотя они могут работать с удивительными скоростями, эти скорости все же конечны. Они могут помочь сделать открытие, освободить математиков от изнурительных бесконечных вычислений и – во многих случаях – предложить варианты, которые никогда не удалось бы заметить при вычислениях вручную.

Проблема Гольдбаха

Мы теперь уже знаем немного о проблеме Гольдбаха, которая заключается в том, что любое четное число, большее 2, может быть представлено как сумма двух простых чисел. Данциг знал, но не упомянул, что любое достаточно большое нечетное число может быть представлено как сумма трех простых чисел. Русский математик Иван Виноградов доказал это в 1937 году. Данциг также знал фантастическую, но интересную теорему, которая провозглашает, что любое положительное целое число может быть представлено как сумма не более чем 300 000 простых чисел. Может показаться, что это далеко от проблемы Гольдбаха, но фактически 300 000 это гораздо меньше бесконечности! Лев Шнирельман, другой российский математик, доказал это в 1931 году. Вскоре после этого Виноградов, используя методы Харди, Литлвуда и Рамануджана, доказал, что любое достаточно большое число может быть представлено как сумма четырех простых чисел. Более точно, это означает, что существует некоторое число N, такое, что любое целое число, большее чем N, может быть представлено как сумма четырех простых чисел. Это уменьшило количество простых чисел в сумме за счет величины числа, для которого утверждение было бы верно.

Виноградов доказал обе теоремы, продемонстрировав противоречие с предположением, что бесконечно много целых чисел не может быть представлено в виде суммы четырех простых чисел. В его доказательстве не определялось, насколько большим должно быть число N, но в 1956 году К.Г. Бороздкин показал, что N определенно должно быть больше, чем $10^{4\,008\,660}$, числа, состоящего из более чем четырех миллионов цифр. На сегодняшний день известно, что «почти все» четные числа могут быть представлены в виде суммы двух простых. «Почти все» здесь означает, что процент четных чисел, меньших чем N, для которых выполняется гипотеза Гольдбаха, стремится к 100 по мере роста N. Даже с момента последнего издания этой книги появилось большое количество теорем, тесно связанных с классической гипотезой Гольдбаха. Прежде всего, было доказано, что любое достаточно большое четное число может быть представлено в виде суммы простого числа и произведения не более 9 простых чисел. С годами количество сомножителей в произведении уменьшалось, сначала до пяти, потом до четырех, потом до трех и, наконец, до двух. Теперь мы знаем, что любое достаточно большое четное число — это сумма простого числа и произведения двух простых чисел. Также мы знаем, что один из вариантов утверждения Гольдбаха справедлив: за исключением конечного количества чисел, любое четное число может быть представлено в виде суммы двух парных простых чисел.

Парные простые числа

До сих пор неизвестно, существует ли бесконечное количество парных простых чисел, но кажется, что это именно так. Возможно, ответ на этот вопрос находится за пределами возможностей современной математики. Но есть и другая, более сильная гипотеза о парных простых числах, которая заключается в том, что количество парных простых чисел, меньших x, растет близко к другому вполне поддающемуся вычислению числу, которое растет бесконечно и зависит от x. Естественно, эта более сильная гипотеза о парных простых числах подразумевает существование бесконечного количества таких чисел. Вот несколько первых пар простых чисел: (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); (29,31); (41,43); (59,61); (71,73); (101,103). Известные к настоящему времени самые большие простые парные числа состоят более чем из 24 000 цифр. Интересно отметить, что в 1995 году Т.Р. Найсли использовал парные простые числа 824 663 702 441 и 824 663 702 443 для обнаружения ошибки в микропроцессоре фирмы Intel Pentium.

Как и в случае с проблемой Гольдбаха, после выхода последнего издания этой книги множество теорем свелось к гипотезе о парных простых числах. С 1919 года известно, что существует бесконечно много таких чисел k, что и k и $k + 2$ можно представить как произведения не более девяти простых чисел. Вскоре после выхода последнего издания этой книги было показано, что k и $k + 2$ можно представить как произведения не более трех простых чисел.

Программисты, разрабатывая тесты, испытывая компьютеры в работе, исследуют множество таких предположений, с оптимизмом разыскивая все больше парных простых чисел и нулей дзета-функции. К чему эти хлопоты? Неважно, сколько парных простых чисел или нулей они найдут, таким способом доказать гипотезу они никогда не смогут. Они ничего и не пытаются доказать; они скорее пытаются продемонстрировать, что то, во что верят теоретики, существует. Каждая новая находка подтверждает непоколебимость гипотез. Пессимисты надеются найти ноль дзета-функции за пределами магической прямой, чтобы получить контрпример. Это также возможно. Однако если первые 1 022 нуля соответствуют предсказанию Римана, насколько вероятно, что следующий не будет соответствовать? И тогда мы должны задать вопрос: Риман проверил только первые три нуля, как же он мог знать, что все они лежат на прямой и их действительная часть равна $^1/_2$? Ответ: Он знал нечто о характере, намерении и предназначении этой твари *в целом*, а не только о том, что происходит, когда она останавливается, чтобы подхватить очередной ноль.

В эту ограниченную подборку включены некоторые из бесценных жемчужин математики, которые получили свое развитие за последние 50 лет. Их выбор ограничен темами, рассмотренными в данной книге, и поэтому преимущественно связан с проблемами теории чисел. Однако читатель должен понимать, что, хотя некоторые из классических задач, упомянутых в книге, были решены, последние 50 лет попыток решить такие задачи, как эти, позволили нам глубже — намного глубже — осмыслить, что же мы делаем, когда занимаемся математикой. Мы понимаем теперь, что все происходит из одного великого и постоянного общего источника, который называется математикой. Эта точка зрения была недоступна Данцигу и другим математикам, работающим в первой половине двадцатого века.

Но мы знаем, как знал и Данциг в 1954 году, что, когда великие теоремы математики аккуратно снимают покрывало со своих тайн в одной из областей, их дразнящие очертания проступают на тончайших занавесях, отделяющих одну область математики от другой. Возможно, несколько занавесей тихо откроется под легким ветром следующих 50 лет.

Джозеф Мазур

Замечания

14 *...птица может отличить два от трех.* Даже у животных есть некое черновое «знание», позволяющие им различать числа. В 1930 году специалист в области экспериментальной этнологии Отто Келер и его коллеги из Фрайбургского университета предположили, что для того чтобы уметь считать, необходимо уметь одновременно сравнивать наборы предметов и запоминать количество объектов. В одном из своих удивительных экспериментов, целью которых было проверить, могут ли животные оперировать с числами, Келеру удалось научить ворона различать количество пятен от двух до шести. Для обучения его этим числам было выставлено пять коробок, помеченных 1, 2, 1, 0 и 1 пятнами соответственно. Ворон сначала открывал первые три коробки, поглощал четыре кусочка еды и улетал. Затем ворон, «думая», что он должно быть ошибся, возвращался, чтобы пересчитать пятна, наклоняя голову один раз перед первой коробкой, два раза перед второй и снова один раз перед третьей. После чего он пропускал четвертую коробку, переходил к пятой, открывал ее и поглощал пятый кусочек пищи.

Келер предполагал, что птица делала то, что мы называем «внутренними отметками», *как это делают люди, когда они* считают на своих пальцах. Он полагал, что у ворона есть некий механизм маркировки, позволяющий ему распознать и зарегистрировать число. Мы знаем, что птицы могут сосчитать яйца в своих гнездах и откладывают именно столько яиц, сколько могут прокормить птенцов. Если их будет слишком много, то птица сама съест яйцо, а если слишком мало — отложит еще.

15 *...среди млекопитающих таких животных нет вообще.* Львы, живущие на воле, могут сравнивать размеры прайдов; они будут атаковать, только если численно превосходят вторгшийся прайд. Они могут различить размер по количеству отличающегося рева. Значит, у них есть способность сравнивать величины. Келер полагал, что у всех животных, а также и у человека есть схема маркировки, позволяющая отслеживать числа.

15 *...ограниченно по объему, что им можно пренебречь.* В 1992 году в журнале «Nature» появилась статья (Karen Wynn. «Addition and Substraction by Human Infants», Nature, 1992, 358: 749—50),

в которой сообщалось об экспериментах, показавших, что пятимесячные младенцы обладают некоторым грубым чувством числа. Группе пятимесячных младенцев показывали куклу-марионетку (изображавшую Микки-Мауса), расположенную на сцене. Затем ширма опускалась, скрывая куклу. Детям показывали вторую куклу, расположенную перед сценой. Потом ширму поднимали. Если были видны две куклы, то младенцы не проявляли удивления, что определялось по времени, в течение которого они пристально разглядывали сцену; но если была видна только одна кукла, то они демонстрировали удивление. (Психологи измеряют удивление детей по времени, в течение которого ребенок пристально разглядывает предмет. Если ребенок смотрит на предмет короткое время, после чего отворачивается, мы можем сделать вывод, что он уже видел этот предмет раньше и заскучал. Длительное же разглядывание означает, что у ребенка еще нет опыта разглядывания того, на что он смотрит, и, следовательно, он пытается поместить этот свой новый опыт в соответствующую категорию ассоциаций.) Аналогичные эксперименты проводились с макаками-резус на воле с теми же самыми результатами. (Hauster, M., MacNailage, P., Ware, M. 1996, Numerical representations in primates. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 93, 1514–17.)

Другой группе младенцев, до того как ширма поднималась, чтобы скрыть кукол из виду, показывали двух кукол. Затем ширму поднимали. Если была видна только одна кукла, младенцы не проявляли удивления; но если были видны две куклы — удивлялись. Это предполагает, что пятимесячные дети способны вычитать один из двух.

Возможно ли, что у младенцев в экспериментах Карен Винн просто формировался мысленный образ, позволяющий заметить исчезновение кукол, так же как у птицы, когда она замечает исчезновение яйца из гнезда? Целью экспериментов Этиенн Кехлин было проверить, действительно ли младенцы формируют мысленные образы предметов (Stanislas Dehaene, *The Number Sense*, pp: 55–56, Oxford University Press). Эксперименты Кехлин были аналогичны экспериментам Карен Винн, за исключением того, что сцена медленно вращалась, так что положения кукол нельзя было спрогнозировать и, следовательно, зафиксировать как мысленный образ. Кехлин выяснила, что младенцы все же удивлялись, если ширма опускалась и обнаруживалось неправильное количество кукол. Таким образом было продемонстрировано, что младенцы не использовали точные мысленные образы конфигурации за ширмой.

В других экспериментах было определено, что, как это ни удивительно, «вычисления» младенцев не зависят от идентичности объектов (Simon, T.J., Hespos, S.J., and Rochat, P. 1995. Do infants understand simple arithmetic? A replication of Wynn, 1992. *Cognitive Development*, 10, 253–269). Младенцы так же удивлялись, если появлялось неправильное количество предметов, но не удивлялись, если кукол заменяли шарами, что демонстрирует распознавание младенцами абстрактных чисел.

21 *...загибать пальцы последовательно.* На отдаленных нагорьях Новой Гвинеи живет племя Юпно. Они считают до 33, используя тщательно разработанную систему, при этом в определенном порядке учитывается каждый палец, затем различные части тела, попеременно с одной и с другой стороны, в том числе пальцы ног, уши, глаза, нос, ноздри, соски, пупок и гениталии. (Wassmann, J., and Dasen, P.R. 1994, Yupno number system *and counting. Journal of cross-Cultural Psycology*, 25[1], 78–94.)

22 *...подробных объяснений, как пользоваться этим методом.* Единственное полное описание старинного метода счета на пальцах дошло до нас в виде рукописной книги «De computo vel loquela digitorum» («О вычислении и разговоре при помощи пальцев»), которую написал достопочтенный Беда, монах бенедиктинец, живший в восьмом веке. Он был известен средневековым ученым среди прочего своими вычислениями изменяющейся даты Пасхального Воскресенья, которая никогда не должна была приходиться на тот же день, что и еврейская Пасха. Поскольку все остальные церковные праздники определяются датой Пасхи, вычисления Беды считались очень важными. Беда демонстрирует, как можно показывать числа от 1 до 1 миллиона, просто разгибая и сгибая пальцы. (Более подробно об этом написано в книге Karl Menninger, *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*, Dover, 1992, New York, pp. 201–220.)

50 *...добавилось еще пять таких чисел.* На сегодняшний день известно 39 совершенных чисел, самое большое из которых равно $2^{13\,466\,916}$ ($2^{13\,466\,917}$ – 1). Оно состоит более чем из четырех миллионов цифр. Конечно, может быть, по порядку это и не тридцать девятое совершенное число.

52 *...парные простые числа.* В 2000 году были открыты самые большие парные простые числа, известные на сегодняшний день. Они равны 665 551 035 × $2^{80\,025}$ ± 1 и состоят из 24 098 цифр. В ноябре 1995 года использовались для обнаружения ошибки в микропроцессоре фирмы Intel Pentium, который должен был проводить вычисления с точностью до 19 знака после запятой, но давал неправильные значения уже после десятого знака. (Источник: Eric W. Weisstei, «Twin primes.» From Meth World – A Wolfram Web Resourse. ***http://mathworld.wolfram.com/ TwinPrimes.html.***)

54 *...должен делиться на пять.* Чтобы понять, почему число вида $n(n^2 + 1)(n^2 - 1)$ всегда делится на пять, разложим последний член на множители. Тогда произведение можно перегруппировать следующим образом: $P(n) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - 1)$. Заметим следующее: $P(n)$ делится на 5, если любой из первых трех сомножителей делится на 5. Если среди них ни один не делится на 5, то n при делении на пять дает в остатке 2 или 3. Если n дает в остатке 2, то n^2 дает в остатке 4. Если n дает в остатке 3, то n^2 дает в остатке 9. В каждом из этих двух случаев после прибавления 1 остаток будет делиться на 5, следовательно, $n^2 + 1$ делится на 5.

55 *...остается проблемой, бросающей вызов изобретательности математиков.* Постулат Гольдбаха, более известный как проблема Гольдбаха, остается одной из великих нерешенных задач. Это также одна из самых старых нерешенных задач в теории чисел. Предположение было высказано в 1742 году в письме прусского математика Кристиана Гольдбаха Леонарду Эйлеру. Оно проверено для всех чисел вплоть до 6 × 10^{16} португальским математиком Тома Оливейра да Сильва из Университета Авейро.

57 *...в общем виде теорема пока не доказана.* Эндрю Уайлс доказал теорему в общем виде в 1994 году.

64 *...которая соответствует современным 100 000.* Данциг имеет в виду число 100 000 000. Название *октада* указывает на показатель степени числа 10^8.

66 *...служит моделью для всех точных наук.* Геометрия служит моделью дедуктивных рассуждений со времен Евклида, но применение этой модели не ограничено геометрией. Дедуктивные рассуждения в теории чисел имели хорошую ре-

путацию и использовались в дедуктивных доказательствах задолго до девятнадцатого века, когда были установлены аксиомы арифметики.

68 *Какой метод для этого использовать?* Данциг хочет сказать, что иногда дедуктивных методов недостаточно и в качестве инструмента для доказательства теорем математики используют другой мощный принцип. Это разъясняется дальше в главе, когда Данциг применяет метод математической индукции, чтобы продемонстрировать ассоциативный закон в арифметике.

69 *...в незаконченной партии двух игроков.* Эта задача известна также как *задача об очках.* В ней спрашивается о количестве очков, которое следовало бы присудить каждому из игроков в кости, если бы их игра осталась незаконченной. Первым эту задачу сформулировал Джероламо Кардано в своей неопубликованной рукописи «Liber de Ludo Aleae» («Об азартной игре»). Эта книга внесла существенный вклад в вычисление вероятностей, связанных с игрой на деньги. Кардано был миланским физиком, математиком и игроком, известным благодаря своей книге «Ars Magna» («Великое искусство»), опубликованной в 1545 году, в которой он проанализировал все, что было известно к тому времени по теории алгебраических уравнений.

76 *...папирус Ринда.* Это часть свитка, написанного около 1700 года до н.э. и обнаруженного в 1858 году шотландским антикваром Генри Риндом.

76 *Ахмес.* Переписчик Ахмес (A'h-mosé) жил где-то между пятнадцатым и семнадцатым веками до н.э. Считается, что он скопировал работу, датируемую восемнадцатым веком до н.э.

78 *...сокращенное написание первого слога в слове arithmos.* Данциг имел в виду *последний* слог.

83 *...освободила алгебру от зависимости от слов.* Замечательное, глубоко научное изложение точки зрения Данцига можно найти в статье Jacob Klein, *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, MIT Press, 1968, Cambridge, MA, pp. 150–185.

87 *...не существует рационального числа, удовлетворяющего уравнению* $x \cdot 0 = a$. В этом и следующем абзацах приведено замечательное объяснение, почему нельзя делить на ноль. Однако необходимо отметить, что ноль является уникальным числом, которое получается при умножении любого числа

на ноль. Значит, если a — любое число кроме нуля, то оно не может быть равно произведению $x \cdot 0$.

90 *...в виде пары.* Приведенный здесь список не подразумевает, что меньшее число всегда равно 1. Он также не подразумевает, что этот список будет продолжаться до бесконечности, прежде чем мы перейдем к меньшему числу 2. Данциг просто имел в виду пару чисел с числителем a и знаменателем b. Существует остроумный способ перечислить все эти числа, составив список всех бесконечных списков таким способом, чтобы n-й список перечислял все дроби со знаменателем n. Этот список всех списков может быть сформирован, чтобы составить единый список всех рациональных чисел.

95 *...доказательство Евклида.* Настоящее доказательство появляется у Евклида в Книге X, Теорема 9. Саму же теорему приписывают Театету, который доказал, что квадратные корни из простых чисел от 2 до 17 также несоизмеримы с единицей почти на 100 лет раньше, чем Евклид написал свои «Элементы». В случае $\sqrt{2}$ непрямое доказательство показывает, что если бы значение $\sqrt{2}$ было соизмеримо со стороной квадрата длиной 1, то существовало бы число одновременно четное и нечетное.

95 *...то диагональ и сторона были бы соизмеримы.* Две линии или длины двух интервалов являются *соизмеримыми*, если отношение длин является рациональным числом. Если их отношение не является рациональным числом, то они называются *несоизмеримыми.*

96 *...непрерывных дробей.* Например, число можно представить в виде так называемой *непрерывной дроби*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

97 *Я предлагаю это теорию вашему вниманию как вполне стоящую.* Мы никогда не узнаем, каким методом были получены значения, но теория Данцига предлагает очень простой метод, и поэтому, весьма вероятно, что именно ее и использовали.

101 *«Арифметика» Диофанта.* Диофант написал свою книгу в четвертом веке до н.э. Его «Арифметика» посвящена решению алгебраических уравнений и теории чисел.

101 *...рациональные числа и квадратные радикалы.* Случаи, когда B является отрицательным, не рассматривались.

102 *...только в радикалах.* Такое ограничение может показаться произвольным, но оказывается, разрешимость в радикалах эквивалентна тому, что уравнение разрешимо с помощью конечной пошаговой процедуры (алгоритма), что может быть выполнено за конечное время.

104 *...построенного на $^8/_9$ его диаметра.* Площадь круга вычисляется по формуле

$$sR^2 = s\frac{D^2}{4},$$

где R — радиус окружности, а D — ее диаметр. Если вместо π подставить $(16/9)^2$, то площадь круга (выраженную как квадрат) можно записать:

$$s\frac{D^2}{4} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \frac{D^2}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 D^2.$$

105 *...такие задачи.* Первое уравнение получается при попытке решить задачу об удвоении объема куба при помощи циркуля и линейки. Второе уравнение получается при попытке решить задачу о трисекции произвольного угла при помощи циркуля и линейки. В этом случае требуется найти величину $x = \cos\frac{\alpha}{3}$. Из тригонометрического тождества $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$ мы получаем уравнение $4x^3 - 3x - \alpha = 0$.

110 *Зенон из Элеи.* Зенон из Эдеи считается открывателем диалектики, и его не надо путать с Зеноном из Китиона, основателем философской школы стоиков. О Зеноне из Элеи известно очень мало. Его визит в Афины и небольшая часть его философии изложена в виде ответов в диалоге Платона «Парменид». Еще немного мы узнаем из книги Диогена Лаэртского «О жизни знаменитых философов», которая была написана спустя 700 лет после смерти Зенона. В книге Зенона содержалось 40 парадоксов о множественности и о движении, только четыре из которых сохранились в «Физике» Аристотеля.

110 *...философ из Стагира.* Так называли Аристотеля, поскольку он был родом из Стагира, древнего города в Македонии.

110 *Ахиллес и черепаха.* Аристотель говорит о беге Ахиллеса, но черепаха, кажется, появилась благодаря современным авторам для придания колорита. Основные источники, из которых мы узнаем о парадоксах Зенона, это «Физика» Аристотеля, «О жизни знаменитых философов» Диогена Лаэртского, комментарии Симплиция к «Физике» Аристотеля и «Парменид» Платона. Ни в одном из этих источников не говорится о черепахе.

112 *...историческая важность «Аргументов».* Нельзя недооценивать историческую значимость «Аргументов». Бертран Рассел писал: «Проблема, поставленная открытием несоизмеримостей, с течением времени оказалась одной из наиболее острых и вместе с тем перспективных проблем, с которыми сталкивался человеческий интеллект в своем стремлении к пониманию мира». (Betrand Russel, *Scientific Method in Phylosophy*, Open Court, London, 1914, p. 164.)

113 *Но сумма бесконечного количества конечных интервалов бесконечна.* Это не то, что хочет сказать сам Данциг. Он вкладывает эти слова в уста Зенона. Мы знаем, что бесконечная сумма последовательных степеней $^1/_2$ равна конечному числу, а конкретно 1. Это утверждение справедливо, только если любой из конечных интервалов больше некоторого конечного числа.

113 Раз*деление времени на интервалы.* Греки в пятом веке представляли моменты времени как точки на прямой или как бусины на нити.

127 *...последовательность.* Последовательность – это математический термин, означающий список объектов, подчиняющихся определенному числовому закону. Объектами последовательности обычно являются числа.

127 *...исчезающими.* В данном случае «исчезновсние» означает уменьшение численных значений или стремление к нулю.

128 *...асимптотическими.* Две асимптотические последовательности имеют значения, стремящиеся друг к другу.

129 *...простейшей последовательностью.* Простейшей в том смысле, что ее членами являются числа, которые явно вычисляются.

130 *...сумма прогрессии.* Это легко показать, если оборвать последовательность на $n + 1$ члене и обозначить соответствующую частичную сумму S_n.

$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n$.

После этого можно вычислить $S_n - rS_n$, и окажется, что это просто $a - ar^{n+1}$.

Найдем S_n из уравнения $S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$ и получим

$$S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r}.$$

Заметим, что с увеличением n, S_n стремится к первоначальной геометрической последовательности.

131 *...сумма бесконечного количества слагаемых оказалась конечной.* Эти объяснения при помощи математических моделей кажутся понятными. Но парадокс остается. Если мы будем считать, что модель корректно представляет дихотомию и Ахиллеса, то аргументы Зенона сводятся к чему-то вроде загадок. Но всегда остается вопрос, как непрерывное движение может быть представлено через эти странные половинные интервалы или особые задержки в гонке между Ахиллесом и черепахой.

133 *...новыми математическими сущностями.* Может показаться, что это странный окольный путь представления того, что мы знаем как действительное число. Но читатель увидит, что эти так называемые самоасимптотические сходящиеся последовательности позволяют дать строгое определение действительного числа, обладающего всеми арифметическими свойствами и непрерывностью, которая предполагается у последовательности действительных чисел. Обратите внимание, что такое определение построено на основе соглашения о том, что рациональные числа уже определены. В нем используется определение рационального числа, которое подразумевает, что оно является асимптотическим и сходящимся, подразумевает, что число представляет собой последовательность.

136 *...которые образуют сходящуюся последовательность 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421.* Читатель может заинтересоваться принципом, по которому строится эта последовательность. Например, каким будет седьмой член последовательности, восьмой и как его найти? Ответ заключается в том, что есть

несколько алгоритмов вычисления последовательности, которая будет сходиться к числу $\sqrt{2}$. С одним из них читатель познакомится в этой главе чуть позже.

139 *...были известны уже грекам.* Бесконечные процессы, приводящие к тем же результатам, что и непрерывные дроби, были известны в Древней Греции. См. книгу Давида Фаулера «The Mathematics of Plato's Academy», второе издание, Oxford University Press, 1999, и книгу Вильбера Кноппа «The Evolution of Euclidian Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry», Kluwer Academic Publisher Group, 1980.

140 *...мы получаем дробь.* Данциг имеет в виду, что это можно записать в виде дроби, в которой каждый член будет находиться в знаменателе знаменателя предыдущего члена. Это можно проиллюстрировать следующим образом:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

142 *...частным случаем непрерывных.* Здесь должно быть «частным случаем непрерывных дробей».

143 *...медленно, но несомненно расходится.* Обратите внимание, что

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \text{ и т.д.}$$

Это означает, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

больше, чем

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

А этот ряд возрастает неограниченно и, следовательно, расходится.

144 *...перегруппировывать члены ряда как угодно.* Приведенный на странице 166 простой пример показывает, что свойства ассоциативности и коммутативности не выполняются для рядов, включающих в себя как положительные, так и отрицательные члены. Возьмем любое ненулевое число a и образуем последовательность $a - a + a - a + \ldots$ Если мы сгруппируем ее как $(a - a)+(a - a) + \ldots$, то в результате получим 0. А если мы сгруппируем ее иначе: $a + (-a + a) + (-a + a) + \ldots$, то в результате получим a.

145 *...сходится в пределе к натуральному логарифму 2.* Кажется, здесь Данциг ошибся.

$$y=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots=1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right),$$

отсюда мы неосторожно делаем вывод, что $y = 1 + \frac{1}{2}(x + y) \Rightarrow y - x = 2.$ Тогда мы должны бы «ошибочно» заключить, что знакопеременный гармонический ряд сходится не к 0, а к 2. Он придерживается своей точки зрения, потому что мы должны бы прийти к ошибочному заключению.

149 *...континуумом не является.* Например, мы уже видели, что пределом последовательности $\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{5}{4}\right)^2, \left(\frac{6}{5}\right)^2$ является трансцендентное число e; не рациональное.

156 *...аналогичного бесконечной последовательности Кантора.* В математике часто бывает, что две на первый взгляд различные теории приводят к одному и тому же результату. И если одна из них избегает определенного понятия (например, бесконечности), а вторая зависит от него, то значит в действительности это понятие необходимо в обеих теориях, хотя одна из них это успешно скрывает, притворяясь, что она его не использует.

161 *...приводит к появлению невозможных выражений.* Чтобы понять это, вспомним алгебру и формулу для решения квадратных уравнений.

Обозначим оба числа через x и y. Тогда $x + y = 10$, а $xy = 40$.

Следовательно, $x = 10 - y$. Подставляя это выражение для x в уравнение и $xy = 40$, получаем $(10 - y)e = 40$, и после упрощения $y^2 - 10y + 40 = 0$. Теперь применим формулу для нахождения корней квадратного уравнения и получим $y = 5 \pm \sqrt{-15}$.

162 *...приводит к чисто мнимому результату.* Кардано вывел формулу для решения уравнений вида $x^3 + ax + b = 0$. По его формуле

$$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Применив эту формулу к уравнению $x^3 + 15x + 4 = 0$, мы получаем решения:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

163 *При такой системе записи решение уравнения, полученное Бомбелли, выглядит следующим образом.* Для начала давайте заметим, что $\sqrt{-121} = 11i$, после этого используем тот факт, что $i^2 = -1$, чтобы показать, что $(-2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$.

Для этого достаточно три раза умножить само на себя выражение $-2 \pm i$ и упростить полученное выражение, воспользовавшись тем, что $i^2 = -1$.

После всех преобразований мы можем записать:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

164 *...удивительное тождество Эйлера.* Естественно возникает вопрос, что означает возведение числа в нецелую степень, а тем более в *комплексную степень? Понятно, что означает* x^n, если n — положительное целое число. Этот смысл расширяется и обобщается при сохранении тех же правил, что и для целых показателей степени. Например, $x^{n+m} = x^n x^m$. Это правило обеспечивает основу для расширения определения того, что означает возвести число в произвольную действительную степень. После этого, используя тождество Муавра (преобразования комплексных степеней числа к синусам и косинусам) и способ представления комплексного числа на плоскости (так называемой комплексной плоскости), мы сможем расширить определение и сказать, *что означает* возвести действительное число в комплексную степень.

169 *...свои глубокие и перспективные мысли.* Речь идет о основах математического анализа.

171 *...средним пропорциональным.* Среднее пропорциональное двух величин — это квадратный корень из их произведения. В данном случае двумя величинами являются L и y. Так что в переводе с латинских терминов (которые больше не используются) полухорда x равна квадратному корню из произведения фокального параметра L и высоты y.

177 *...векторы OA и OB.* Плохо знакомые с векторами читатели считают вектор парой чисел, но его также можно представить геометрически как отрезок, начинающийся в точке O и заканчивающийся в точке A. В данном случае точка O является началом координат и ее координаты (0, 0). Если точка A соответствует числу $a + bi$, то в обычной декартовой геометрии она обозначается как (a, b). Поэтому вектор — это отрезок, начинающийся в точке (0, 0) и заканчивающийся в точке (a, b). Есть несколько преимуществ в том, чтобы представлять точку A как вектор. Одно из них заключается в возможности сложения векторов. Вектор OA можно сложить с вектором OB, просто складывая их компоненты. Если точка OA заканчивается в точке (a, b) и OB заканчивается в точке (c, d), то сумма OA + OB будет заканчиваться в точке $(a + c, b + d)$. Это правило сложения векторов называется правилом параллелограмма, поскольку новый вектор будет являться диагональю параллелограмма, построенного на сторонах OA и OB.

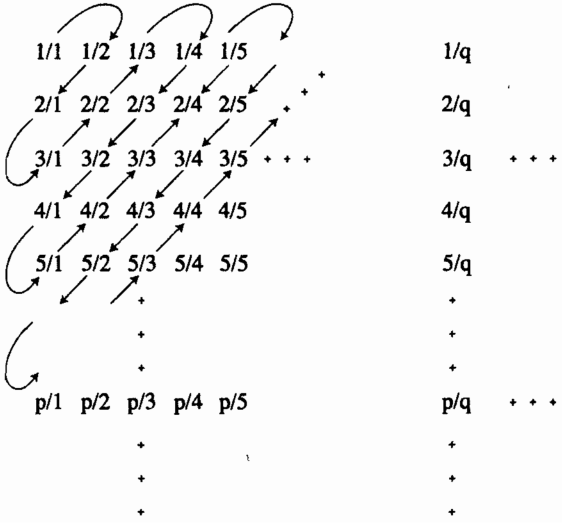
184 (Здесь некоторая путаница с названием *теории множеств*, автоматически устраненная при переводе. — *Прим. пер.*)

186 *...играют роль в арифметике конечного.* Это можно рассматривать в качестве определения того, что такое бесконечность. Множество называется бесконечным, если можно установить взаимнооднозначное соответствие между элементами всего множества и элементами его собственного строгого подмножества. *Строгое* здесь означает, что существует хотя бы один элемент большего множества, не включенный в подмножество. Например, множество четных положительных целых чисел — строгое подмножество множества всех положительных целых чисел, поскольку 3 является элементом большего множества, не включенным в множество всех четных целых чисел. Множество положительных целых чи-

сел бесконечно, поскольку каждому положительному целому числу можно сопоставить вдвое большее число, так что каждое целое число имеет пару среди четных чисел.

187 *...счетными.* Наряду с термином счетное (countable) часто используется термин перечислимое (denumerable), поскольку в случае конечных множеств счет – это процесс установления взаимнооднозначного соответствия с конечным подмножеством положительных целых чисел.

188 *...см. рис. на с. 189.* На ту же самую задачу можно взглянуть по-другому. Построим массив иначе. Запишем в столбик все положительные целые числа. В следующий такой же бесконечный столбик запишем все целые числа, но на этот раз в виде дробей со знаменателями 2. В следующий бесконечный столбик опять запишем все целые числа, заменяя все знаменатели на 3, и т.д. Результат показан на рисунке, приведенном ниже. Каждая дробь p/q может быть помещена в двумерный массив, причем ее вертикальное и горизонтальное положение определяется значениями p и q, поскольку p соответствует номеру ряда (сверху вниз), а q – порядковому номеру в строке (отсчитываемому слева направо). После этого по «змейке» можно сосчитать все рациональные числа, пропуская те, которые уже посчитаны.



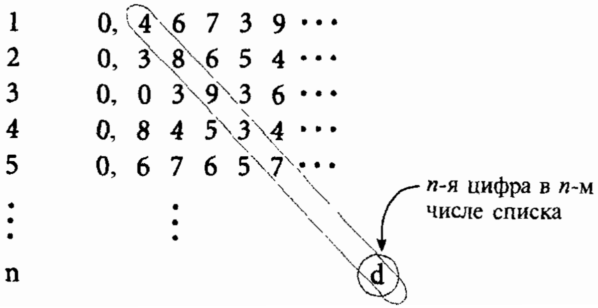
191 *...существует только одно уравнение с высотой 1.* Если высота небольшая, то выбор коэффициентов невелик. Если высота равна 1, то степень многочлена не может превышать 1. Поэтому если мы изучим все возможные многочлены степени 1, то увидим, что подходит только $x = 0$. Если высота равна 2, то есть уже три варианта: $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x^2 = 0$. Для высоты, равной 3, начнем с уравнений степени 1 и продолжим, переходя к более высоким степеням. Заметим, что алгоритм остановится на одном-единственном уравнении степени 3, а именно: $x^3 = 0$. Всего возможно пять уравнений первой степени: $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $2x + 1 = 0$, $2x - 1 = 0$, $3x = 0$.

192 *...диагональная процедура.* Если мы попытаемся пересчитать множество всех действительных чисел, то столкнемся с одной проблемой. Действительные числа от 0 до 1 — это числа, которые можно представить строкой десятичных знаков (возможно, бесконечной). Например, 0,5634876392397203 09... — это одно из таких чисел, а многоточие указывает, что цифры могут продолжаться бесконечно. Давайте попробуем составить список действительных чисел в диапазоне от 0 до 1. Один из возможных списков может выглядеть так:

1. 0,46739...
2. 0,38654...
3. 0,03936...
4. 0,84534...
5. 0,67657...

⋮

Неважно, как вы упорядочите эти действительные числа, поскольку всегда будет бесконечно много чисел, не вошедших в список. Одно из них вы можете получить, продвигаясь вниз



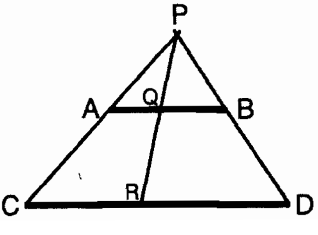
n-я цифра в *n*-м числе списка

по бесконечной диагонали бесконечного массива (диагональ обведена на рисунке). В результате получается число 0,48937...

Теперь построим новое число, изменяя эту диагональ следующим образом: Если цифра не равна 9, прибавим к ней 1. Все 9 заменим на 0. В данном примере первая цифра станет равна 5, вторая – 9, третья – 0 и т.д. Заново построенное число будет 0,59048... Его нет в списке, т.к. если бы оно там было, то оно находилось бы в определенной строке, например в *n*-й. Мы оказались бы в очень странной ситуации, потому что в *n*-м числе списка на *n*-м месте стоит цифра *n* (на рисунке она обведена в кружок). Значит, на этом месте одновременно стоит и цифра *d*, и цифра *d* + 1. Но, судя по нашему построению, на этом месте должно стоять число. Остается предположить, что числа, которое мы построили, в списке нет. Отсюда следует, что множество действительных чисел *больше*, чем множество целых чисел, и, следовательно, *больше*, чем множество рациональных чисел. Цифр вдоль диагонали бесконечно много, и так же бесконечно много чисел можно построить предложенным способом, и всех этих чисел нет в списке. (Мы могли бы прибавить 2 или 3 или любое число от 1 до 9 к цифрам диагонального числа и получить такой же результат.)

Это показывает, что мощность множества действительных чисел больше мощности рациональных чисел.

2 *...более длинный отрезок не содержит больше точек, чем короткий.* Чтобы в этом убедиться, возьмите два отрезка AB и CD. Разместим более короткий отрезок AB над более длинным. Соединим соответствующие концы отрезков, построив AC и BD, и продолжим их вверх до пересечения в точке P. Затем выберем любую точку Q на отрезке AB, проведем прямую от P к Q и продолжим PQ до пересечения с CD в точке R. Таким образом, мы установили взаимнооднозначное соответствие между точками AB и точками CD. (См. рис. ниже.)



194 *...десятичных дробей.* В данном случае имеется в виду разложение на десятичные дроби любого действительного числа от 0 до 1, например: $1/p = 0{,}31831...$

195 *...до сих пор не увенчались успехом.* Вопрос о существовании такого множества относится к континуум-гипотезе. Данциг не упоминает континуум-гипотезу под таким названием, хотя довольно долго обсуждает континуум. До 1964 не было ответа на вопрос о том, существует ли множество, мощность которого больше мощности целых чисел, но меньше мощности действительных чисел. континуум-гипотеза провозглашает, что такого множества нет. В 1964 году Пол Коэн, молодой математик из Стэнфорда, решил вопрос, показав, что континуум-гипотеза не является ни истинной, ни ложной. Другими словами, ее истинность неразрешима, поскольку зависит от системы аксиом, выбранной в теории множеств.

195 *...количество всех соответствий.* Эти соответствия можно рассматривать как множество объектов.

198 *... зависит от сущности натурального числа.* Здесь необходимо сказать о большом отличии в позиции двух сторон. Формалисты соглашаются с тем, что математические объекты существуют, если их существование не приводит к противоречиям, но интуиционисты признают только те математические объекты, которые можно описать или построить за конечное число шагов.

Тобиас Данциг

Числа - язык науки

Перевод с английского – Ю.О. Каратассо
Компьютерная верстка – В.В. Павлова
Дизайн книжных серий – С.Ю. Биричев, А.В. Кочеткова
Дизайн – И.А. Куколева
Корректор – О.Н. Заикина
Выпускающий редактор – О.В. Смирнова
Ответственный за выпуск – С.В. Зинюк

Формат 84 х 108/32. Печать офсетная.
Гарнитура Ньютон.
Печ.л. 9,5.Тираж 3000 экз. (1-й завод 1500 экз.) Зак. №594
Бумага офсет №1, плотность 65 г/м^2.

Издательство «Техносфера»
Москва, ул. Краснопролетарская, д.16, стр.2

Диапозитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
Академиздатцентра «Наука» РАН
121099 Москва, Шубинский пер., 6

Тобиас Данциг
Числа – язык науки

Тобиас Данциг (1884-1956) – доктор математических наук (университет США, штат Индиана) преподавал в Колумбийском университете и университете в Мэрилэнде.

"Нет никаких сомнений в том, что это самая интересная книга по истории математики, которая когда-либо попадала ко мне в руки. Если бы люди могли ценить такие вещи, то эта книга заняла бы устойчивое положение в мировой литературе. В ней чрезвычайно последовательно, оригинально и живо показана эволюция математики с самых древних времен до нынешних дней. "

Альберт Эйнштейн

ISBN 978-5-94836-172-7

9 785948 361727 >